Matriz de mudança de base

Problema 1

Se a matriz de mudança da base B para a base C é $P = (a_{ij})$ e a matriz de mudança de base C para outra base D (do mesmo espaço) é $Q = (b_{ij})$, qual é a matriz de mudança de B para D?

Resolução

$P \cdot Q$. Suponhamos $B = \{u_1, \cdots, u_n\}, C = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $D = \{w_1, \cdots, w_n\}$. A definição de matriz de mudança nos garante então que:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \text{ (onde } j = 1, \ldots, n) \text{ e } w_k = \sum_{j=1}^{n} b_{ik} u_j \text{ (onde } k = 1, \ldots, n)$$

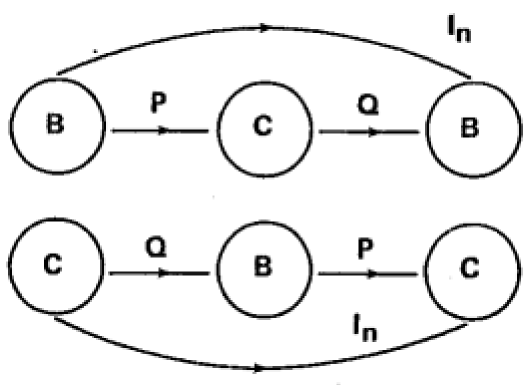
Daí

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) u_i \text{ (onde } k = 1, \ldots, n)$$

Nota

Uma consequência do que acabamos de ver é que uma matriz de mudança de bases é sempre inversível[1].

Sejam P a matriz de mudança de base de B para C e Q a matriz de mudança de C para B.



Do diagrama acima decorre que $PQ = QP = I_n$. Logo P é inversível e P^{-1} é simplesmente a matriz de mudança de C para B.

Problema 2

X

Problema 3

Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V e $P = (a_{ij})$ é uma matriz inversível, então os n vetores $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$ onde $(j = 1, \ldots, n)$ também formam uma base de V?

Resolução

Suponhamos $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = e$. Sendo x_j escalares quaisquer. Então

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) u_i = e$$

Como este sistema é homogêneo e a matriz dos seus coeficientes é P (inversível) então $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Logo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I. e também é base de V.

Com isso concluímos que **qualquer** matriz inversível pode ser utilizada enquanto uma matriz de mudança de base e **qualquer** matriz de mudança de base também é uma matriz inversível.

---

1. A matriz inversa é obtida quando a multiplicação da matriz original por esta resulta na matriz identidade. ↩