Atividade 3

Resolução dos exercícios obrigatórios, feita por Guilherme de Abreu Barreto[1].

Capítulo 5.5

Exercício 73

Avalie a integral definida:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^4}\,dx$$

Resolução

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^4}\,dx \begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}\,dx = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \dfrac{dx}{2u} \implies 2u\,du = dx \end{cases}$$

$$2\int_{\sqrt{0}=0}^{\sqrt{1}=1} \frac{u}{(1+u)^4}\,du \begin{cases} v = 1+u \implies u = v-1 \\ dv = du \end{cases}$$

$$2\int_{0+1=1}^{1+1=2} \frac{v-1}{v^4}\,dv = 2\left[\int_1^2 \frac{v}{v^4}\,dv - \int_1^2 \frac{1}{v^4}\,dv\right] = 2\left[-\frac{v^{-2}}{2}\Bigg|_1^2 + \frac{v^{-3}}{3}\Bigg|_1^2\right] =$$

$$2\left[\frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$$

Exercício 83

A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de $5\ s$. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de $0,5\ L/s$. Isso explica, em partes, porque a função $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume da ar inalado no instante t.

Resolução

O volume de ar inalado desde o início do ciclo respiratório (0) até o instante t pode ser aferido pela integral da taxa de fluxo de ar, aferida entre estes dois momentos:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\,dx \begin{cases} u = \dfrac{2\pi x}{5} \\ \\ du = \dfrac{2\pi}{5}\,dx \implies dx = \dfrac{5}{2\pi}\,du \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi t}{5}} \sin u\,du = \frac{5}{4\pi}\cdot -\cos u\Big|_0^{\frac{2\pi t}{5}} = \frac{5}{4\pi}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)\right]$$

Capítulo 7.1

Exercício 51

Use integração por partes para demonstrar a seguinte redução:

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$$

Resolução

Conforme a definição, a fórmula da integração por partes para integrais indefinidas pode ser expressa nos seguintes termos:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Assim o sendo,

$$\int (\ln x)^n\,dx \begin{cases} u = (\ln x)^n \implies du = n(\ln x)^{n-1}\,dx \\ dv = dx \implies v = x \end{cases}$$

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - \int n(\ln x)^{n-1}\,dx = \boldsymbol{x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx}$$

Exercício 67

Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

Resolução

A função velocidade trata-se da função derivada da função espaço. Assim o sendo, para obtermos a variação ΔS entre a posição inicial $S(0)$ e final $S(t)$, temos:

$S(t) =$

$$\int \frac{t^2}{e^t}\,dt \begin{cases} u = t^2 \implies du = 2t\,dt \\ dv = \dfrac{dt}{e^t} \implies v = \int e^{-t} dt \begin{cases} w = -t \\ dw = -dt \end{cases} \therefore v = -\int e^w\,dw = -e^{-t} \end{cases}$$

$$S(t) = -\frac{t^2}{e^t} + 2\int \frac{t}{e^t}\,dt \begin{cases} u = t \implies du = dt \\ dv = \dfrac{dt}{e^t} \implies v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$S(t) = -\frac{t^2}{e^t} + 2\left(-\frac{t}{e^t} + \int e^{-t} dt\right) = \frac{t^2}{e^t} + 2\left(-\frac{t}{e^t} + \frac{1}{e^t}\right) + \underbrace{C}_{=S(0)}$$

$$\implies \Delta S = \frac{-t^2 - 2t + 2}{e^t}$$

---

1. nUSP 12543033 ↩