Atividade 2

Resolução dos exercícios obrigatórios, feita por Guilherme de Abreu Barreto[1].

Capítulo 5.3

Exercício 45

O que está errado com a seguinte equação?

$$\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Bigg]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$$

Resolução

A equação em questão faz uso do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para calcular o valor da integral da função $f(x) = x^{-4}$ no intervalo $[1, -2]$. Entretanto, o TFC, conforme sua definição, aplica-se somente às integrais de **funções contínuas**. Este não é o caso aqui, pois nota-se que $f(x) = x^{-4}$ apresenta descontinuidade no ponto $x = 0$.

Exercício 65

A função de Fresnel S foi definida no Exemplo 3, e seus gráficos estão nas Figuras 7 e 8.

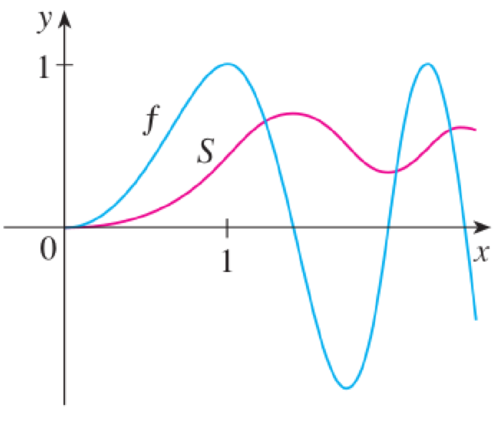


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

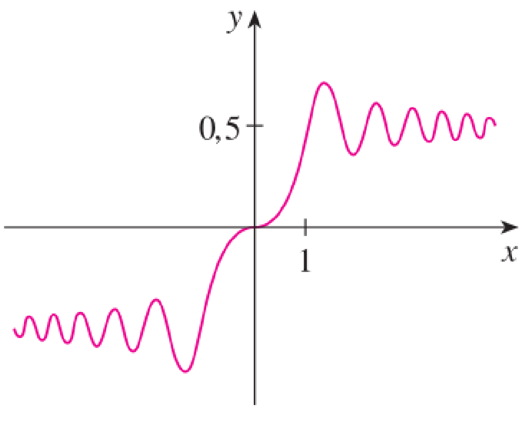


FIGURA 8
A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

(a) Em que valores de x essa função tem valores máximos locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

(c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\, dt = \frac{1}{5}$$

Resolução

(a) Conforme se observa pela figura 7, a função de Fresnel apresenta valores máximos e mínimos para os valores de x aqueles em que sua função derivada $S'(x) = \sin(\pi x^2/2)$ tem valor 0. O que ocorre sempre que o valor de x é diferente de 0 e múltiplo de √2:

$$S'(x) = \sin\left(\frac{\pi(n\sqrt{2})^2}{2}\right) = 0 \implies \begin{cases} \text{Máximo local, se } k \text{ for} \begin{cases} \text{ímpar e positivo} \\ \text{par e negativo} \end{cases} \\ \\ \text{Mínimo local, se k for} \begin{cases} \text{par e positivo} \\ \text{ímpar e negativo} \end{cases} \end{cases}$$

Onde n é um número inteiro e positivo. Ou seja, para $x > 0$ tem-se um máximo local quando:

$$\frac{\pi x^2}{2} = (2n+1)\pi \implies x = \sqrt{2(2n+1)}$$

Enquanto, para $x < 0$, isso ocorre quando:

$$\frac{\pi x^2}{2} = 2n\pi \implies x = -2\sqrt{x}$$

(b) Conforme as propriedades das funções derivadas, enquanto a função derivada descreve a localização dos pontos máximos e mínimos da função da qual foi derivada, por vez, a função derivada desta primeira descreve a concavidade desta última: para cima quando $S''(x) > 0$ e para baixo quando $S''(x) < 0$. Onde $S'''(x)$ é:

$$S'(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \implies S''(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\cdot \pi x$$

Logo, para $x > 0$:

$$\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\cdot \pi x > 0 \implies \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) > 0 \implies 0 < \frac{\pi x^2}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Generalizando:

$$\left(2n - \frac{3}{2}\right)\pi < \frac{\pi x^2}{2} < \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\sqrt{4n-3} < x < \sqrt{4n-1}$$

Para qualquer número inteiro e positivo n.

De maneira análoga, para $x < 0$:

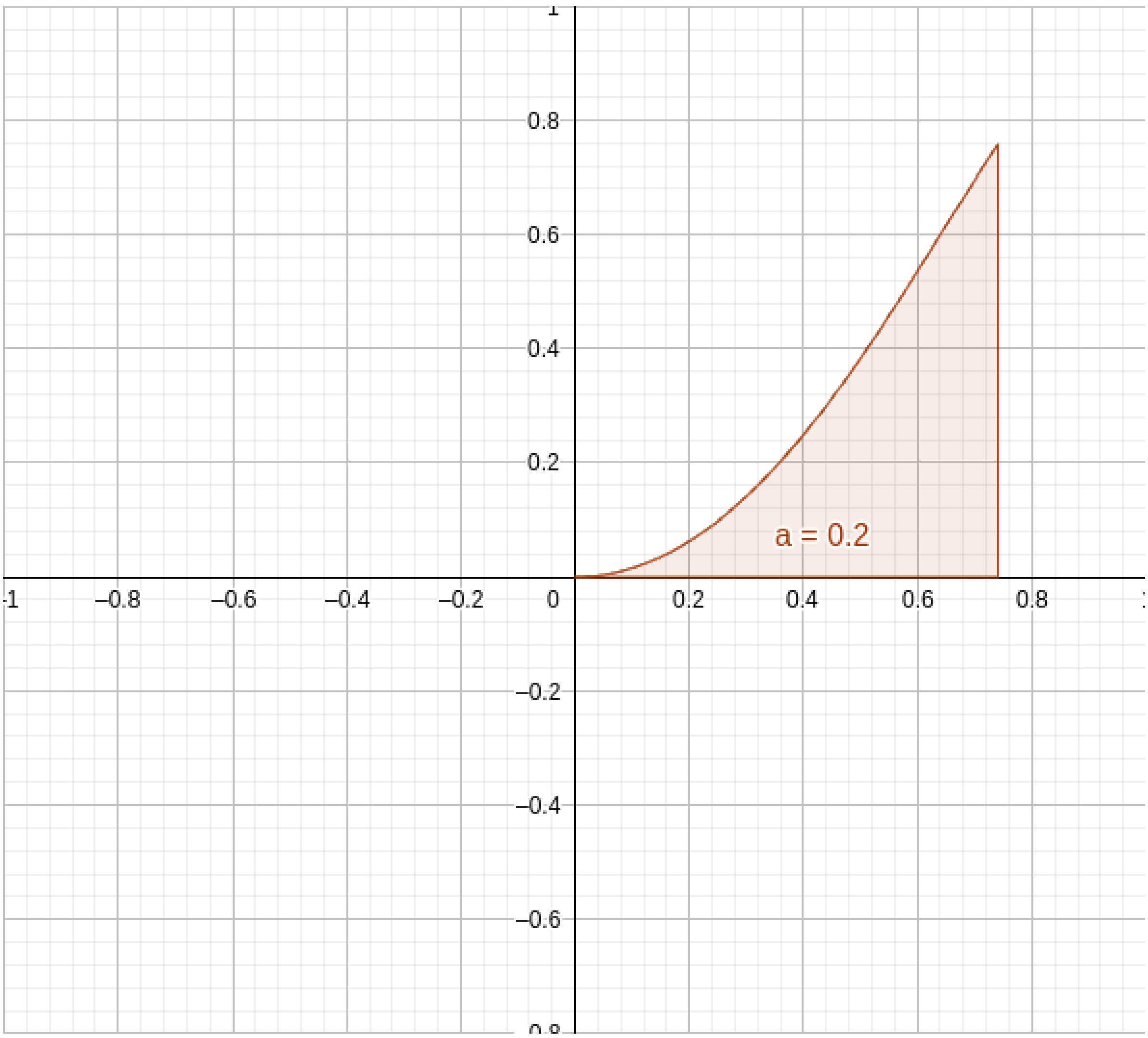
$$\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) \cdot \pi x > 0 \implies \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) < 0 \implies \frac{\pi}{2} < \frac{\pi x^2}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

Generalizando:

$$\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < \frac{\pi x^2}{2} < \left(2n - \frac{3}{2}\right)\pi$$

$$\sqrt{4n-1} < |x| < \sqrt{4n-3}$$

(c) O gráfico à seguir foi gerado aplicando a fórmula da integral em uma calculadora gráfica e experimentando-se valores para x menores que √2 até ser encontrado o valor aquele que corresponde à área descrita pelo enunciado em **x = 0.74**.



Capítulo 5.4

Exercício 45

Calcule a integral de $\int_{-1}^{2}(x-2|x|)\ dx$

Resolução

(I) $\int_{-1}^{2}(x-2|x|)\ dx = \int_{-1}^{0}(x+2x)\ dx + \int_{0}^{2}(x-2x)\ dx =$

$3\int_{-1}^{0} x\ dx - \int_{0}^{2} x\ dx = 3[F(0)-F(-1)] - [F(2)-F(0)]$

(II) $f(x) = x \implies F(x) = \frac{x^2}{2}$

(I) e (II) $3 \cdot -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{7}{2}$

Exercício 67

O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é C'(x) = 3 - 0,01x + 0,000006x^2 US$/m (em dólares por metro). Ache o aumento do custo (A) se o nível de produção for elevado de 2 000 para 4 000 metros.

Resolução

$$C'(x) = 3 - 10^{-2}x + 6\cdot 10^{-6}x \implies C(x) = 3x - \frac{10^{-2}}{2}x^2 + 2\cdot 10^{-6}x^3$$

$$A = \int_{2\cdot 10^3}^{4\cdot 10^3} C'(x)dx = C(4\cdot 10^3) - C(2\cdot 10^3) =$$

$$4\cdot 10^3\left[3 - \frac{10^{-2}\cdot 4\cdot 10^3}{2} + 2\cdot 10^{-6}\cdot 16\cdot 10^6\right] - 2\cdot 10^3(3-10+8)$$

$$= \mathbf{58\cdot 10^3\ dollares/m}$$

---

1. nUSP 12543033 ↩