Atividade 9

Resolução dos exercícios obrigatórios, feita por Guilherme de Abreu Barreto[1].

Capítulo 14.4

Exercício 24

O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1. Use essa tabela para determinara aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a -15 ºC e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a -17 ºC e a velocidade do vento for de 55 km/h.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (ºC) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Resolução

A aproximação linear para $f(T, v)$ é dada por:

$$f(T, v) \approx f(a, b) + f_T(a, b)(T - a) + f_v(a, b)(v - b)$$

Para valores $a \approx T$ e $b \approx v$. Assim sendo, para estimarmos $f(-17, 55)$ utilizaremos o valor descrito na tabela para $f(a, b) = f(-15, 60)$ e aqueles adjacentes a este. Assim, temos que

$$f_T(-15, 60) \approx \lim_{h \to 5} \frac{f(-15 + h, 60) - f(-15, 60)}{2h}$$

$$+ \lim_{h \to -5} \frac{f(-15 + h, 60) - f(-15, 60)}{2h} = \frac{\frac{-23 + 30}{5} + \frac{-36 + 30}{-5}}{2} = \frac{13}{10}$$

e

$$f_v(-15,60) \approx \lim_{h\to 10} \frac{f(-15,60+h)-f(-15,60)}{2h}$$

$$+\lim_{h\to -10} \frac{f(-15,60+h)-f(-15,60)}{2h} = \frac{\frac{30-30}{10}+\frac{30-29}{-10}}{2} = -\frac{1}{20}$$

Logo,

$$f(-17,55) \approx f(-15,60) + f_T(-15,60)(-17+15) + f_v(-15,60)(55-60)$$

$$\approx -30 + \frac{13}{10}(-2) - \frac{1}{20}(-5) \approx -32,25 \blacksquare$$

Exercício 42

Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2,1,3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

- $\mathbf{r}_1(t) = \langle 2+3t, 1-t^2, 3-4t+t^2\rangle$
- $\mathbf{r}_2(u) = \langle 1+u^2, 2u^3-1, 2u+1\rangle$

ambas estão em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

Resolução

Podemos deduzir onde as retas passam pelo ponto P fazendo a seguinte comparação:

- Se $\mathbf{r}_1(t) = \langle 2+3t, 1-t^2, 3-4t+t^2\rangle = \langle 2,1,3\rangle$, então $\begin{cases} 2+3t=2 \\ 1-t^2=1 \\ 3-4t+t^2=3 \end{cases} \therefore t = 0$ Portanto, $\mathbf{r}_1(t)$ cruza P em $\mathbf{r}_1(0)$.
- Se $\mathbf{r}_2(u) = \langle 1+u^2, 2u^3-1, 2u+1\rangle = \langle 2,1,3\rangle$, então $\begin{cases} 1+u^2=2 \\ 2u^3-1=1 \\ 2u+1=3 \end{cases} \therefore u = 1$

  Portanto, $\mathbf{r}_2(u)$ cruza P em $\mathbf{r}_2(1)$.

Derivamos então as equações das curvas para obter a reta tangente destas:

- $\mathbf{r}_1(t) = \langle 2+3t, 1-t^2, 3-4t+t^2\rangle \implies \mathbf{r}_1'(t) = \langle 3, -2t, 2t-4\rangle$
- $\mathbf{r}_2(u) = \langle 1+u^2, 2u^3-1, 2u+1\rangle \implies \mathbf{r}_2'(u) = \langle 2u, 6u, 2\rangle$

Com as retas tangentes conseguimos obter a reta normal $\mathbf{n}$, perpendicular à ambas, no ponto $P = (2, 1, 3)$:

$$\mathbf{r}_1'(0) \times \mathbf{r}_2'(1) = \langle 3, 0, -4 \rangle \times \langle 2, 6, 2 \rangle$$
$$= \langle 0 \cdot 2 - (-4 \cdot 6), -4 \cdot 2 - 3 \cdot 2, 3 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \rangle = \langle 24, -14, 18 \rangle$$

Por vez, a reta normal nos permite descrever a **equação linear** do plano sobre o ponto P:

$$24x - 14y + 18z - (24 \cdot 2 - 14 \cdot 1 + 18 \cdot 3) = 0$$
$$\implies 12x - 7y + 9z - (12 \cdot 2 - 7 \cdot 1 + 9 \cdot 3) = 0$$
$$\implies 12x - 7y + 9z - 44 = 0 \blacksquare$$

Capítulo 14.5

Exercício 43

Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de $3\ cm/s$ e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de $2\ cm/s$. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento, o segundo lado tem $30cm$ de comprimento e o ângulo é $\frac{\pi}{6}$?

Resolução

Denominemos por x o primeiro lado, y o segundo e θ o ângulo entre eles. Pela aplicação da Lei dos senos, podemos aferir a área do triângulo A como sendo $A = \frac{xy\sin\theta}{2}$ Assim, o valor de A se dá em função de x, y e θ e estes por vez se dão em função do tempo t. Sabemos pelo enunciado que a taxa de variação do comprimento de x, $\frac{dx}{dt} = 3$, e y, $\frac{dy}{dt} = -2$. Também, que para a área A não ocorre variação, $\frac{dA}{dt} = 0$. Buscamos aqui saber a taxa de variação do ângulo θ, $\frac{d\theta}{dt}$. Ora, podemos relacionar estes dados fazendo uso da Regra da Cadeia e inferi-la:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} \implies 0 = \frac{3y\sin\theta}{2} - \frac{2x\sin\theta}{2} + \frac{xy\cos\theta}{2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{2x\sin\theta - 3y\sin\theta}{xy\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{2x - 3y}{xy} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{2 \cdot 2\cancel{0} - 3 \cdot 3\cancel{0}}{60\cancel{0}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot -\frac{1}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{36} \blacksquare$$

Exercício 59

A Equação 6 é uma fórmula para a derivada dy/dx de uma função definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, sendo que F é diferenciável e $F_y \neq 0$. Comprove que se F tem derivadas contínuas de segunda ordem, então uma fórmula para a segunda derivada de y é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_yyF_x^2}{F_y^3}$$

Resolução

Dado que a função foi definida implicitamente da maneira descrita pelo enunciado, sabemos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$. Denominemos $G(x, y) = -\frac{F_x}{F_y}$. Ao derivarmos ambos os lados da equação e utilizarmos a Regra da Cadeia, teremos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \cancel{\frac{dx}{dx}} 1 + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Sendo que

- $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{F_yF_{xx} - F_xF_{yx}}{F_y^2}$
- $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{F_yF_{xy} - F_xF_{yy}}{F_y^2}$

Assim,

$$\frac{d2y}{dx2} = -\frac{F_yF_{xx} - F_xF_{yx}}{F_y^2} + \left(-\frac{F_yF_{xy} - F_xF_{yy}}{F_y^2}\right)\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) =$$

$$-\frac{F_{xx}F_y^2 - F_{yx}F_xF_y - F_{xy}F_yF_x + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

Consideremos agora que F tem derivadas de segunda ordem contínuas então, pelo Teorema de Claurault, $F_{xy} = F_{yx}$ e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_yyF_x^2}{F_y^3} \blacksquare$$

---

1. nUSP 12543033; Turma 04 ↩