Atividade 10

Resolução dos exercícios obrigatórios, feita por Guilherme de Abreu Barreto[1].

Capítulo 14.6

Exercício 35

Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos

- $A(1,3)$,
- $B(3,3)$,
- $C(1,7)$ e
- $D(6,15)$.

E as derivadas direcionais de f em A em direção aos vetores

- $D_{\overrightarrow{AB}} f = 3$,
- $D_{\overrightarrow{AC}} = 26$.

Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\vec{AD}$.

Resolução

Sejam x e y as duas variáveis para qual f está definida.

1. Nota-se que em $\vec{AB}$ ocorre variação apenas em x enquanto em $\vec{AC}$ ocorre variação apenas em y. Então,
   - $D_{\overrightarrow{AB}} f(1,3) = f_x(1,3)a + \cancel{f_y(1,3)b} = 3 \implies f_x(1,3)a = 3$;
   - $D_{\overrightarrow{AC}} f(1,3) = \cancel{f_x(1,3)a} + f_y(1,3)b = 26 \implies f_y(1,3)b = 26$;
2. Com isso conseguimos inferir o vetor gradiente $\nabla f(1,3)$:

$$\nabla f(1,3) = f_x(1,3)a + f_y(1,3)b = \langle f_x(1,3), f_y(1,3)\rangle = \langle 3, 26\rangle$$

3. Podemos aferir a derivada direcional $D_{\overrightarrow{AD}} f(1,3)$ a partir da equação $D_{\mathbf{u}} f(1,3) = \nabla f(1,3) \cdot \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é o vetor unitário com direção $\vec{AD}$ tal que

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \frac{y - y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}}, \frac{12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right\rangle = \left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$$

4. Por fim, temos que

$$D_{\mathbf{u}} f(1,3) = \langle 3, 26 \rangle \cdot \left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle = 3 \cdot \frac{5}{13} + 26 \cdot \frac{12}{13} = \frac{327}{13} \blacksquare$$

Exercício 57

Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

Resolução

Por hipótese, podemos descrever o cone enquanto uma função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. O cone toca a origem quando $z = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, ou seja, $z = 0 \iff x = y = 0$. Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer na superfície S do cone. Utilizando a equação geral do plano, podemos escrever a equação do plano tangente à S em P como

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\implies \cancel{2}x(x - x_0) + \cancel{2}y(y - y_0) - \cancel{2}z(z - z_0) = 0$$

$$\implies x^2 + y^2 - z^2 = xx_0 + yy_0 - zz_0$$

Já estabelecemos que a expressão $x^2 + y^2 - z^2$ perpassa a origem quando $x = y = z = 0$, então o outro lado da igualdade, $xx_0 + yy_0 - zz_0$, também é uma equação que perpassa a origem e, portanto, a equação do plano no total é representativa de um plano que cruza a origem. $\blacksquare$

Capítulo 14.7

Exercício 23

Utilize um gráfico ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, quando $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

Resolução

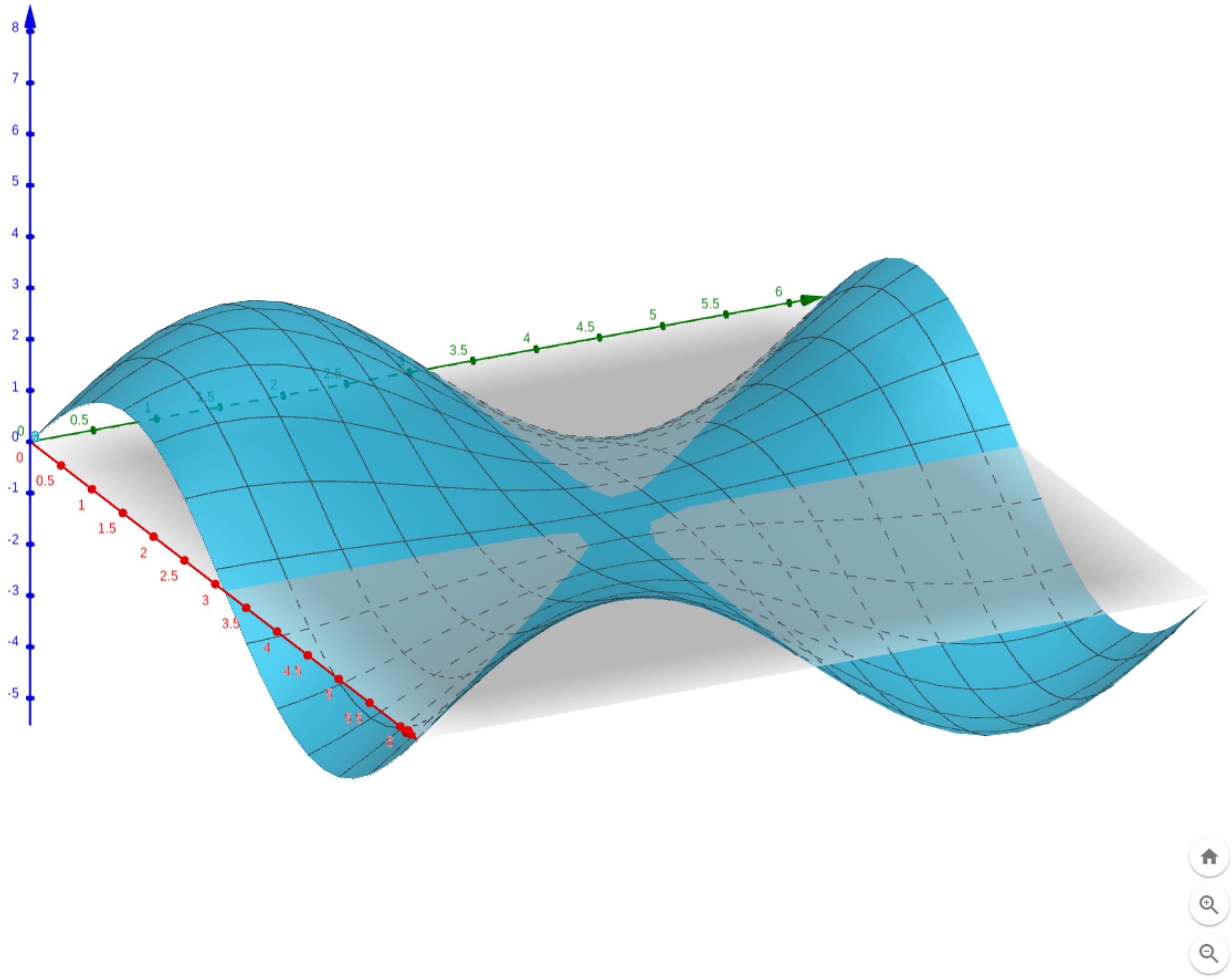

Gráfico da função f

Observa-se pelo gráfico que a função, no domínio descrito, possui um ponto máximo, um ponto de sela e um ponto mínimo. Vamos determiná-los em seus valores e coordenadas (x, y). Iniciemos por encontrar suas derivadas parciais:

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y) \begin{cases} f_x = \cos x + \cos(x+y) \\ f_y = \cos y + \cos(y+y) \end{cases}$$

Num ponto crítico, tem-se que $f_x = f_y = 0$, logo,

$$\begin{cases} f_x = 0 \implies \cos x + \cos(x+y) = 0 \implies \cos(x+y) = \cos x \\ f_y = 0 \implies \cos(x+y) = \cos y \end{cases}$$
$$\therefore x = y$$

Vemos então que todos os pontos críticos encontram-se em coordenadas (x, x), o que é útil para encontrá-las, embora insuficiente para diferenciá-las. Mudemos nossa abordagem para encontrá-las fazendo uso de uma função de uma única variável $g(x) = 2\sin x + \sin 2x$. Podemos encontrar os pontos desta derivando-a e em seguida igualando-a a zero:

$$g'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 0 \implies \cos x + \cos 2x = 0$$
$$\implies \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \implies \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0$$
$$\implies 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Ao admitirmos $z = \cos x$ temos pela aplicação da fórmula de Bhaskara:

$$2z^2 + z - 1 = 0 \implies 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1) = 0$$

Tirando as raízes desta equação, obtemos:

$$z = \cos x \begin{cases} \cos x = -1 \implies x = \pi \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Tais são os pontos críticos desta função no eixo (x, x). Aplicando estes valores na equação original, obtemos:

$$f(\pi, \pi) = \sin\pi + \sin\pi + \sin 2\pi = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ (ponto de cela)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (máximo absoluto)}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = -\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (mínimo absoluto)} \blacksquare$$

Exercício 31

Determine os valores máximo e mínimo **absolutos** para $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ no conjunto $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Resolução

Podemos encontrar pontos críticos de uma função de dois termos à partir de suas derivadas parciais quando estas encontram-se igualadas à 0:

$$f_y = 2y + x^2 = 0 \implies 2y = -x^2$$

$$f_x = 2x + 2xy = 0 \implies 2x - x^3 = 0 \implies x(2 - x^2) = 0$$
$$\implies x = \begin{cases} 0 \\ \cancel{\pm\sqrt{2}}\ (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$
$$\therefore 2y = -0^2 \implies y = 0$$

A função portanto possui ponto crítico em $(0, 0)$. Pela aplicação do Teste da Segunda Derivada podemos inferir se este se trata de um ponto máximo ou mínimo local:

$$\mathrm{Det}(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = (2 + 2 \cdot 0) \cdot 2 - (2 \cdot 0)^2 = 4$$

Temos que $\mathrm{Det}(0,0) > 0$ e $f_{xx}(0,0) > 0$, então $f(0,0)$ trata-se de um mínimo local de valor $f(0,0) = 4$. Passemos a avaliar a presença de máximos e mínimos nas extremidades da função. Dado o domínio, esta descreve uma superfície de área quadrada cujo centro encontra-se em $f(0,0)$, avaliemos cada lado deste quadrado:

- **L_1:** caso em que $x = 1$ e $-1 \leq y \leq 1$, $L_1(y) = y^2 + y + 5$.
  - Intuitivamente conseguimos saber que obteremos o valor máximo para esta extremidade quando $y = 1$. Ou seja, $L_1(1) = 1 + 1 + 5 = 7$;
  - o valor mínimo requer que realizemos mais alguns passos, a começar por encontrar sua derivada ($L_1'(y) = 2y + 1$) localizar seu ponto crítico $\left(2y + 1 = 0 \implies y = -\frac{1}{2}\right)$, para então aferí-lo: $L_1\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 5 = \frac{23}{4} = 5,75$.
- **L_2:** caso em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y = -1$, $L_2(x) = x^2 + 1 - x^2 + 4 = 5$ (constante).
- **L_3:** caso em que $x = -1$ e $-1 \leq y \leq 1$, $L_3(y) = y^2 + y + 5$ (análogo à **L_1**).
- **L_4:** caso em que $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 1$, $L_4(x) = 2x^2 + 5$.
  - Maximo: $L_4(1) = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$;
  - Mínimo: $L_4'(x) = 4x = 0 \implies x = 0 \therefore L_4(0) = 5$.

Finalmente, concluímos que os valores máximo e mínimo para a função dada no domínio dado são, respectivamente, **7** e **4**. ■

---

1. nUSP 12543033; Turma 04 ↩