Atividade 6

Resolução dos exercícios obrigatórios, feita por Guilherme de Abreu Barreto[1].

Capítulo 12.3

Exercício 39

Determine o vetor projeção e a projeção escalar de **b** sobre **a** onde

$$\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle;\ \mathbf{b} = \langle 4, 6 \rangle$$

Resolução

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-5 \cdot 4 + 12 \cdot 6}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = 4$$

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{4}{13}\langle -5, 12 \rangle = \left\langle \frac{-20}{13}, \frac{48}{13} \right\rangle \ \blacksquare$$

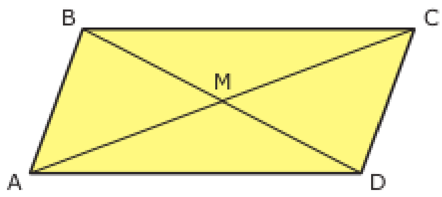
Exercício 63

A *Lei do Paralelogramo* afirma que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

Dê uma interpretação geométrica da Lei do Paralelogramo e a demonstre

Resolução



Considere o paralelogramo acima. É possível aferir o comprimento de suas diagonais à partir do comprimento de seus lados. De fato, podemos aferi-las separadamente usando a *Lei dos Cossenos*:

$$|\overline{BD}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{AB}|^2 - 2|\overline{AD}||\overline{AB}|\cos\theta$$

e

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{CD}|^2 - 2|\overline{AD}||\overline{CD}|\cos(\pi - \theta) =$$
$$|\overline{AD}|^2 + |\overline{CD}|^2 - 2|\overline{AD}||\overline{CD}|[\cos\pi \cdot \cos\theta + \cancel{\sin\pi \cdot \sin\theta}] =$$

$|\overline{AD}|^2 + |\overline{CD}|^2 + 2|\overline{AD}||\overline{CD}|\cos\theta$

Substituindo o comprimento dos lados e diagonais por sua representação vetorial ($|\mathbf{a}| = |\overline{AD}| = |\overline{BC}|$, $|\mathbf{b}| = |\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\overline{AC}|$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\overline{BD}|$) e somando-se as equações anteriores, temos demonstrada a *Lei do Paralelogramo*:

$$+\begin{cases} |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \\ |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \end{cases}$$

$$\therefore\ |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2\ \blacksquare$$

Capítulo 12.4

Exercício 37

Utilize o produto misto para mostrar que os vetores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ são coplanares.

Resolução

Conforme a definição de produto misto, dados vetores são complanares se o produto misto destes for igual à 0. Avaliemos o presente caso.

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$4 - 5(-12) - 2(27+5) = 0\ \blacksquare$$

Exercício 49

Demonstre que $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Resolução

Lembremos as seguintes propriedades:

P1. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ onde θ é o ângulo entre **a** e **b**, $0 \leq \theta \leq \pi$;

P2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;

P3. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$;

Logo,

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \underbrace{\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - \mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})}_{\mathbf{P3}} =$$

$$\underbrace{\mathbf{a}\times\mathbf{a}}_{\mathbf{P1}} + \mathbf{a}\times\mathbf{b} \underbrace{-\mathbf{b}\times\mathbf{a}}_{\mathbf{P2}} - \underbrace{\mathbf{b}\times\mathbf{b}}_{\mathbf{P1}} = \cancel{\mathbf{a}^2\sin 0} + 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) - \cancel{\mathbf{b}^2\sin 0} = 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \blacksquare$$

---

1. nUSP 12543033; Turma 04 ↩