Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total

A notação $\int f(x)\, dx$ é tradicionalmente usada para denotar a primitiva de f e é chamada **integral indefinida**.

$$\int f(x)\, dx = F(x) \implies F'(x) = f(x)$$

Por exemplo,

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C \implies \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Obs.: A integral **indefinida**, de forma $\int f(x)\, dx$, representa toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor constante C), enquanto uma integral **definida**, de forma $\int_a^b f(x)\, dx$ representa um *número*. A relação entre estas é dada por:

$$\int f(x)\, dx\Big|_a^b = \int_a^b f(x)\, dx$$

Variação total

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$. Portanto, a integral

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Representa a taxa de variação total. Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais.

Exemplo

Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Logo,

$$\int_a^b V'(x)\, dx = V(b) - V(a)$$

é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2 .