O Teorema Fundamental do Cálculo

Parte 1

Se a função f for contínua em $[a, b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ (na qual } a \leq x \leq b)$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em em (a, b) e $g'(x) = f(x)$. Grosseiramente falando: *se primeiro integramos f e então derivamos o resultado, retornamos à função original f.*

Exemplos

1. Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

Uma vez que no período descrito $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua, a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece que

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

---

2. Derive:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt$$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\int_1^{x^4} \sec t\,dt}_{u=x^4} = \frac{d}{du}\left[\int_1^u \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} = \sec x^4 \cdot 4x^3$$

> **Obs:** A aplicação deste teorema exige que a incógnita esteja no limite superior. Inverta a integral se necessário for.

Parte 2

Se a função f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Frequentemente utiliza-se a seguinte notação equivalente:

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$