Produto Escalar

Definição

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, então o **produto escalar** de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Assim, para achar o produto escalar de a e b, multiplicamos as componentes correspondentes e somamos. O resultado não é um vetor. É um número real, isto é, um escalar, por isso o nome.

Exemplos

1. $\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2 \cdot 3 + 4 \cdot -1 = 2$
2. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot -1 = 7$

Propriedades

Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores de V_3, $\mathbf{e}$ o vetor nulo, e c um escalar, então:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = 0$

Teorema

O produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ tem uma interpretação geométrica em termos do **ângulo θ entre $\mathbf{a}$** e $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

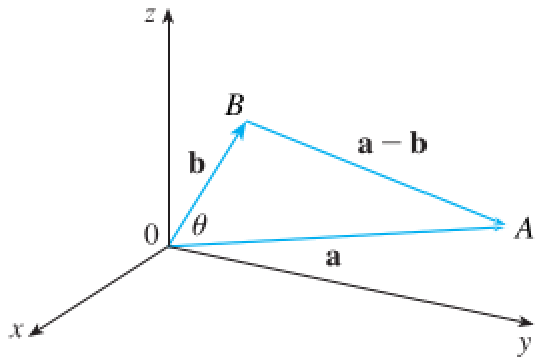


Figura 1

Demonstração

Se aplicarmos a Lei dos Cossenos no triângulo OAB da Figura 1, obteremos

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\theta$$

Onde $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ e $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. Ou seja,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta =$$
$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta =$$
$$-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta =$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

Exemplo

Determine o ângulo entre dois vetores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$ e $\mathbf{b}\langle 5, -3, 2\rangle$.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} =$$
$$\frac{2(5) + 2(-3) + 2(-1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

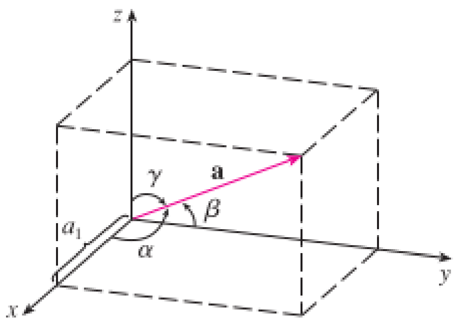
Casos específicos

Dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ formam um ângulo

- ortogonal se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \implies \theta = \frac{1}{2}\pi$;
- agudo se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$;
- obtuso se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$.

Ângulos Diretores

Os ângulos α, β e γ (no intervalo $[0, \pi]$) que $\mathbf{a}$ faz com os eixos coordenados positivos x, y e z.



Os cossenos desses ângulos diretores são chamados **cossenos diretores** do vetor $\mathbf{a}$.

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

Onde

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

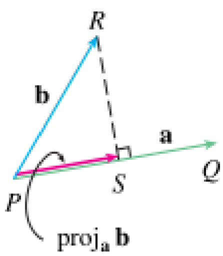
Por isso

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle |\mathbf{a}|\cos\alpha, |\mathbf{a}|\cos\beta, |\mathbf{a}|\cos\gamma \rangle = |\mathbf{a}|\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Disso implica que

$$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Projeções

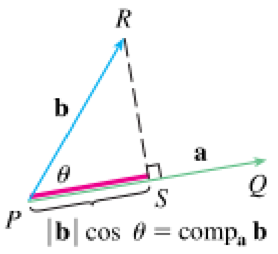


A figura acima mostra as representações $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ com a mesma origem P. Se S é o pé do perpendicular a partir de R à reta contendo $\overrightarrow{PQ}$, então o vetor coam representação $\overrightarrow{PS}$ é chamado **vetor projeção** de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$ e é denotado por $\text{proj}_\mathbf{a}\mathbf{b}$.

$$\text{proj}_\mathbf{a}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Onde $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ é o *versor* (vetor unitário) de $\mathbf{a}$.

A projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$ (também chamada componente de $\mathbf{b}$ ao longo de $\mathbf{a}$) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ é definida como o módulo com sinal do vetor projeção, cujo valor é dado pelo número $|\mathbf{b}|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

Observe que o vetor projeção é a projeção escalar vezes o versor de $\mathbf{a}$:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$