O Produto Vetorial

Definição

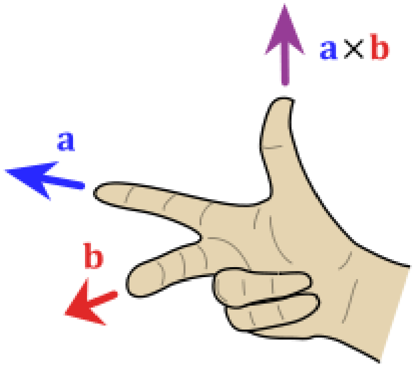
Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então **produto vetorial** ou **cruzado** de **a** e **b** é o vetor **c** perpendicular tanto à **a** e **b** descrito por

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

> **Obs:** Definição de produto vetorial para vetores *tridimensionais*.

Por ser ortogonal tanto à **a** e **b**, tem-se que:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$$



> A regra da mão direita fornece a direção de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ortogonal ao plano que contêm **a** e **b**. Nesta, um dos vetores aponta para o pulso enquanto os dedos da mão fecham-se em direção ao outro vetor pelo ângulo agudo entre estes. Nesta configuração, o polegar levantado aponta para $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Propriedades

Se **a**, **b** e **c** são vetores e *c* é um escalar, então

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
3. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
5. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
7. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Pela aplicação da propriedade 2 sobre as bases canônicas $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, obtemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \end{array}$$

Resultado este que pode ser verificado pela aplicação da **regra da mão direita**.

Exemplo

Encontre um vetor perpendicular ao plano que passa pelos pontos

$$P(1,4,6), Q(-2,5,-1), R(1,-1,1)$$

Resolução

O vetor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ é perpendicular a ambos $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ e, portanto, perpendicular ao plano que passa por P, Q e R. Tem-se que:

$$\overrightarrow{PQ}=(-2-1)\mathbf{i}+(5-4)\mathbf{j}+(-1-6)\mathbf{k}=-3\mathbf{i}+\mathbf{j}-7\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR}=(1-1)\mathbf{i}+(-1-4)\mathbf{j}+(1-6)\mathbf{k}=-5\mathbf{j}-5\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\langle 1(-5)+7(-5),-7(0)+3(-5),-3(-5)-1(0)\rangle$$
$$=\langle -40,-15,15\rangle=-5\langle 8,3,-3\rangle$$

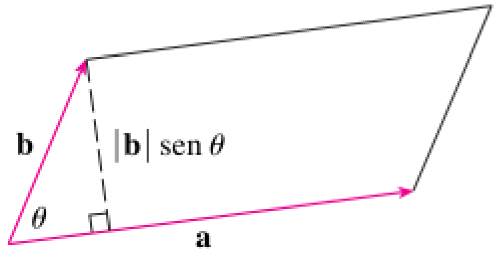
Assim, temos que $\langle -40,-15,15\rangle$ é perpendicular ao plano e, no mais, todo múltiplo não nulo de $\langle 8,3,-3\rangle$ também o é.

Teorema

Se θ é o ângulo entre **a** e **b**, $0\le\theta\le\pi$, então

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta=A$$

Onde A é a área descrita pelo paralelogramo formado entre os vetores. Assim, dois vetores são paralelos entre si se $\theta=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.



Caso específico

A ideia de produto vetorial aparece muito frequentemente em física. Por exemplo, ao apertarmos um parafuso aplicando uma força a uma chave de boca iremos girar o parafuso). O torque τ (em relação à origem) é definido como sendo o produto cruzado dos vetores posição e força:

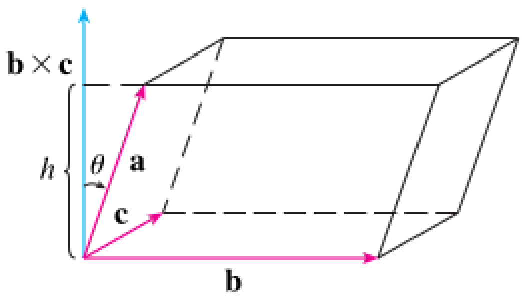
$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Posto em termos da definição de produto vetorial, isso seria equivalente à

$$|\tau| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin \theta$$

Produtos Triplos

O produto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocorre na Propriedade 5 da definição de produto vetorial é chamado **produto misto ou produto triplo escalar** dos vetores **a**, **b** e **c**. O significado geométrico do produto misto pode ser visto considerando-se o paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**.



Assim sendo, o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores a, b e c é o módulo do produto misto:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Caso específico

Se usarmos a fórmula anterior e descobrirmos que o volume do paralelepípedo determinado por **a**, **b** e **c** é 0, então os três vetores precisam pertencer ao mesmo plano; ou seja eles são **coplanares**.

Exemplo

$$a =< 1, 5, -2 >, b =< 3, -1, 0 >, c =< 5, 9, -4 >$$
$$\therefore V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 1(4) - 5(-12) - 2(27 + 5) = 0$$