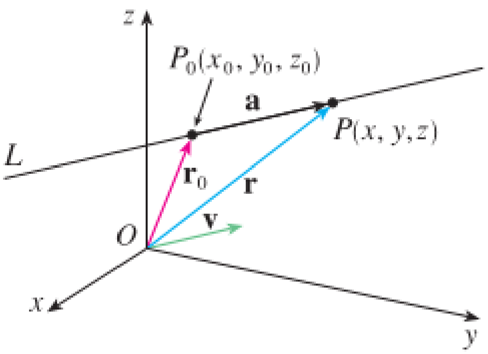
Equações de Retas e Planos

Equação vetorial no espaço tridimensional

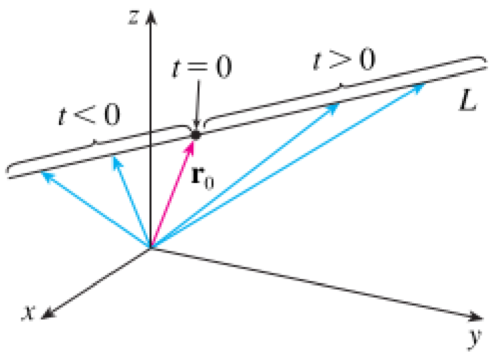


$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Onde:

- $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ é o vetor que parte da origem do sistemas de coordenadas O e coincide com a origem do vetor $\mathbf{a}$, P_0;
- $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é o vetor que parte da origem do sistema de coordenadas O e coincide com a extremidade oposta do vetor $\mathbf{a}$, P;
- $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ é um vetor paralelo à $\mathbf{a}$ partindo da origem do sistema de coordenadas, denominado **vetor diretor**;
- t é o escalar que multiplica $\mathbf{v}$ de tal forma que este assume a mesma magnitude e sentido que $\mathbf{a}$.

Assim, para diferentes valores de t correspondem distintos pontos P em L:



Explicitando os componentes na fórmula anterior, tem-se:

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + \langle ta, tb, tc \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Desta equação derivamos as seguintes **equações paramétricas**:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

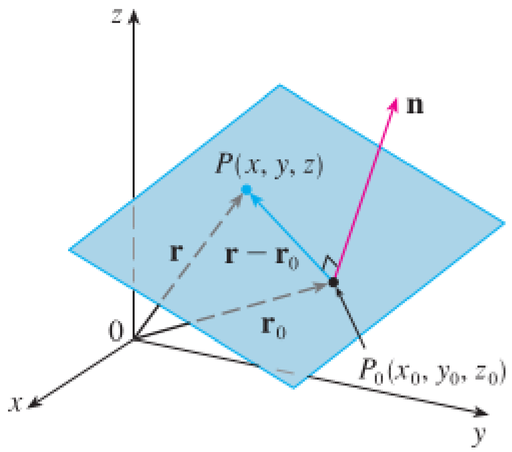
Podemos observar que entre estas t é um fator comum. Logo, para qualquer vetor $\mathbf{a}$ na reta L em que $a, b, c \in \mathbb{R}^*$a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Este conjunto de equações são denominadas **equações simétricas** de L.

Planos

Um plano no espaço fica determinado se conhecermos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ no plano e um vetor $\mathbf{n}$, denominado **vetor normal**, ortogonal ao plano.



Assim, seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer contido no plano tem-se que o vetor que liga P_0 à P é $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ tal que o produto vetorial $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Ou seja

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

Escrito de maneira a explicitar os componentes dos vetores $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ temos

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

a **equação escalar do plano** que passa por P_0 com vetor normal $\mathbf{n}$.

No mais, a equação anterior pode ser simplificada como:

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Fórmula essa conhecida como **equação linear** em x, y, z. Uma importante aplicação desta equação é o cálculo da distância D de um ponto com relação a um plano. Seja x, y, z as coordenadas deste ponto, tem-se:

$$D = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Equações simétricas na representação de planos

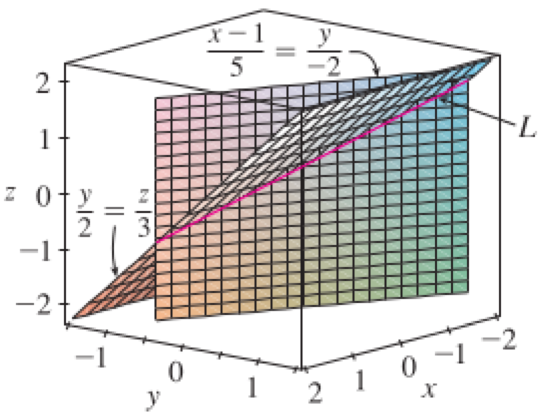
Podemos pensar na reta como a intersecção de dois planos:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad e \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Por exemplo, para uma reta L descrita por

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} \quad e \quad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

Tem-se o seguinte gráfico:



Exemplos

Exemplo 1

Mostre que as retas L_1 e L_2 com equações paramétricas dadas por

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t & y_1 = -2 + 3t & z_1 = 4 - t \\ x_2 = 2s & y_2 = 3 + s & z_2 = -3 + 4s \end{cases}$$

são retas **reversas**, isto é, são retas que não se interceptam e não são paralelas (não pertencendo, portanto, a um mesmo plano).

Resolução

As retas não são paralelas, pois os componentes de seus vetores diretores $\langle 1, 3, 1\rangle$ e $\langle 2, 1, 4\rangle$ não são proporcionais entre si.

As retas também não se intersectam pois, se houvesse intersecção, o seguinte sistema haveria uma solução:

$$\begin{cases} 1 + t = 2s \\ -2 + 3t = 3 + s \\ 4 - t = -3 + 4s \end{cases}$$

O que não é o caso para qualquer valor de t e s.

Exemplo 2

Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ e $R(5, 2, 0)$.

Resolução

Os vetores **a** e **b** correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \langle 3 - 1, -1 - 3, 6 - 2\rangle = \langle 2, -4, 4\rangle \\ \mathbf{b} = \langle 5 - 1, 2 - 3, 0 - 2\rangle = \langle 5, 2, 0\rangle \end{cases}$$

Como tanto **a** quanto **b** pertencem ao plano, o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal ao plano e pode ser tomado como o vetor normal **n**. Assim,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} =$$
$$(8 + 4)\mathbf{i} - (-4 - 16)\mathbf{j} + (-2 + 16)\mathbf{k} = \langle 12, 20, 14\rangle \equiv \langle 6, 10, 7\rangle$$

Com o ponto $P(1, 3, 2)$ e o vetor normal **n**, uma equação do plano é

$$6(x - 1) + 10(y - 3) + 7(z - 2) = 0 \implies 6x + 10y + 7z = 50$$

Exemplo 3

a. Determine o ângulo entre os planos $x + y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 1$

Os vetores normais a esses planos são

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle \quad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3\rangle$$

Portanto, se θ é o ângulo entre os dois planos,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ$$

b. Determine as equações simétricas da reta intersecção L desses dois planos.

Primeiro precisamos encontrar um ponto em L. Por exemplo, podemos achar o ponto onde a reta intercepta o plano xy tomando $z = 0$ na equação dos dois planos. Isso fornece as equações $x + y = 1$ e $x - 2y = 1$, cuja solução é $x = 1$, $y = 0$. Portanto, o ponto $(1, 0, 0)$ encontra-se em L.

Observe que, como L pertence a ambos os planos, é perpendicular ao vetor normal de ambos os planos. Então, um vetor **v** paralelo a L é dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

e assim as equações simétricas de L podem ser escritas como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$