Limites e continuidade

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que se $(x, y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ então $|f(x, y) - L| < \varepsilon$[^1].

Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ não existe.

---

1. Observe que $|f(x, y) - L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L, e $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ é a distância entre o ponto (x, y) e o ponto (a, b). Noutras palavras, a definição diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tornarmos a distância de (x, y) a (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). ↩