Regra da Cadeia

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de derivação de uma função composta.

Caso 1

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

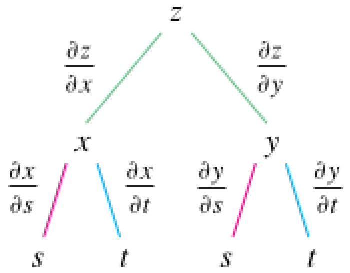
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Caso 2

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Denomina-se s e t as variáveis **independentes**, x e y as variáveis **intermediárias**, e z a variável **dependente**. Tal qual ilustra o seguinte **diagrama em árvore**:

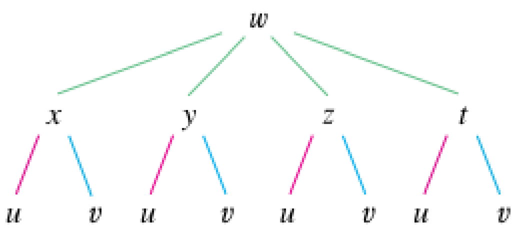


A Regra da Cadeia (Versão Geral)

Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ onde cada x é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, \ldots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

Por exemplo, a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e $x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$ é exemplificada pela seguinte diagrama de árvore



e pode ser descrito em suas parciais por:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

Diferenciação implícita

Suponha que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$