Derivadas direcionais e o vetor gradiente

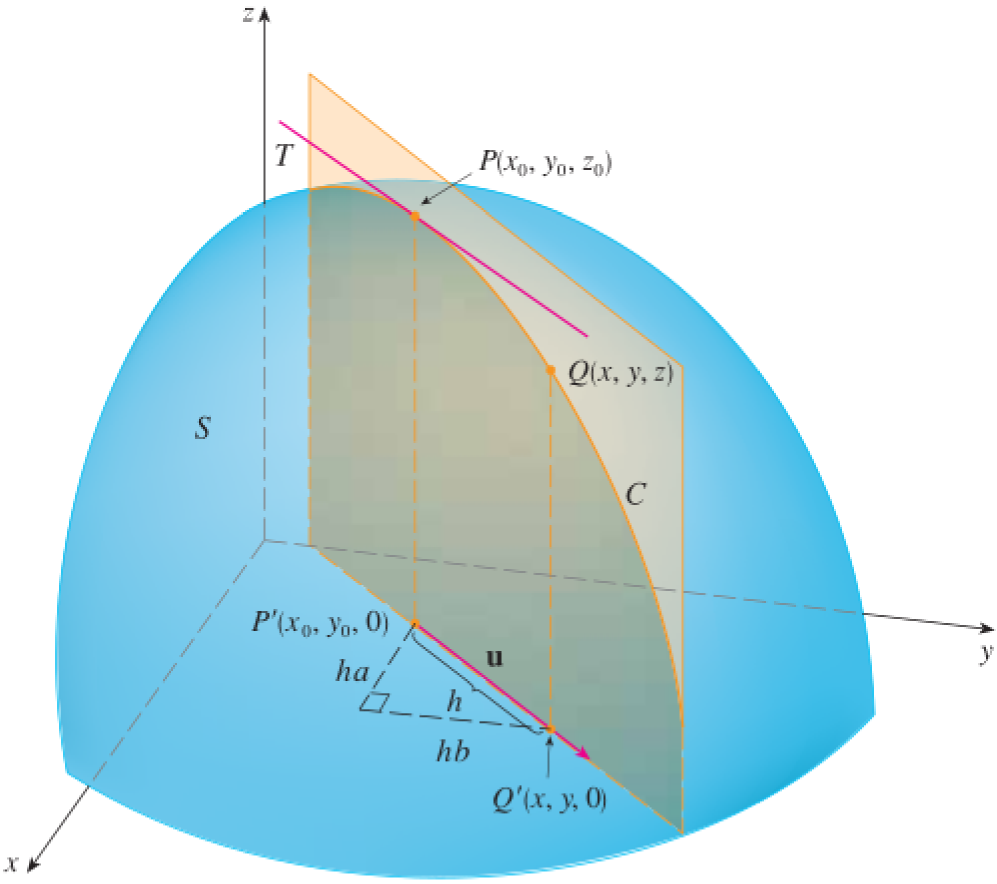
Derivadas direcionais

A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Onde $x = x_0 + ha$ e $y = y_0 + hb$.

A seguinte imagem ilustra a representação espacial da equação:



Podemos reescrever este limite em termos das derivadas parciais de x e y e, pela Regra da Cadeia, das derivadas de x e y com relação à h:

$$D_{\mathbf{u}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Ainda, se o vetor unitário $\mathbf{u}$[^1] faz um ângulo θ com o eixo x positivo (como na figura anterior), então podemos escrever $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ e a fórmula do Teorema anterior fica

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

Vetor gradiente

Outra maneira de se escrever a função anterior é como o produto escalar de dois vetores:

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle a,b\rangle =$$

$$\langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \mathbf{u}$$

Onde $\mathbf{u}$ é o vetor unitário, ou **versor**. O primeiro vetor deste produto escalar ocorre em diversas situações e por isso recebe o nome especial de **vetor gradiente** de f. Este pode ser denotado por:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Ou seja,

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

Maximizando a Derivada Direcional

Suponha f uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{v})$ é $|\nabla f(\mathbf{v})|$. O que ocorre quando o vetor unitário $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{v})$.

A variação de direção entre dois vetores pode ser dada pelo cosseno de um dado ângulo θ. Assim, o valor máximo de $\cos\theta$ é 1 quando $\theta = 0$.

$$D_{\mathbf{u}} = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

Planos Tangente às Superfícies de Nível

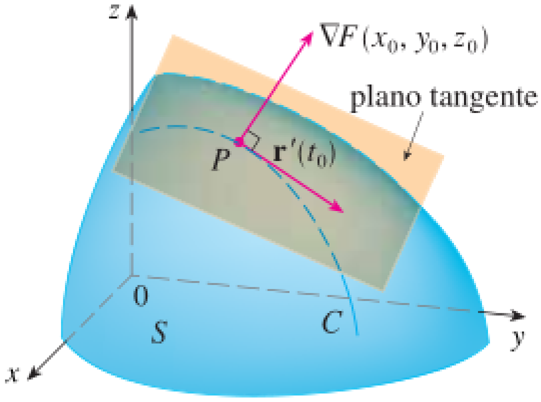
Tal qual visto anteriormente, o plano tangente a uma superfície S descrita por $f(x,y)$ em um ponto P é descrito pela formula da sua **diferenciação total**:

$$f'(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

Podemos reescrever essa equação em termos de produto notável:

$$f'(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \langle f_x, f_y\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle = \nabla f \cdot \mathbf{r}'$$

Onde $\mathbf{r}'$ é a reta tangente à superfície e portanto paralela ao plano tangente. Tal qual ilustra a seguinte representação:



O que esta equação nos diz, portanto, é que o vetor gradiente é perpendicular ao vetor tangente para qualquer curva C em S que passe em $P(x_0, y_0)$.

Não entendi o resto

---

1. Para encontrar o vetor unitário $\mathbf{u}$, ou versor, de um dado vetor $\mathbf{v}$, aplique a fórmula: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ ↩