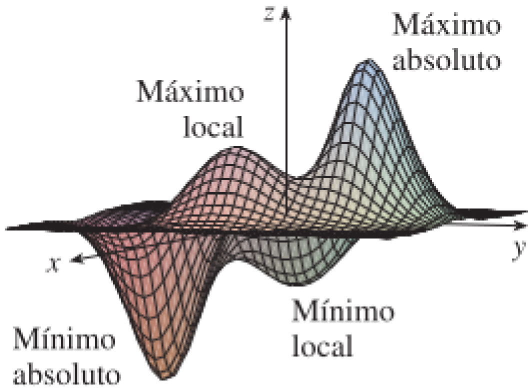
Valores Máximo e Mínimo

Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). Neste caso o número $f(a, b)$ é denominado o **valor máximo local**. Enquanto, se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo (a, b), f tem um mínimo local em (a, b) e $f(a, b)$ é denominado o **valor mínimo local**. Se estas inequações valem para todos os pontos (x, y) no domínio de f, segue que este possui um máximo e mínimo **absolutos**.

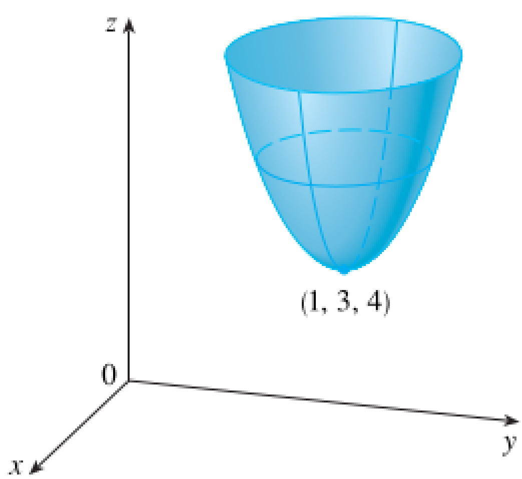


Um ponto (a, b) é chamado **ponto crítico** (ou ponto estacionário) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir. O Teorema dispõe que se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f. No entanto, como no cálculo variável único, nem todos os pontos críticos originam máximos ou mínimos. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$. Já que $(x - 1)^2 \geq 0$ e $(y - 3)^2 \geq 0$, temos $f(x, y) = 4$ para todos os valores de x e y. Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local e, de fato, é o mínimo absoluto de f.



Teste da segunda derivada

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ — ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f. Seja

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Se $D > 0$ **e** $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um **mínimo local**.
- Se $D > 0$ **mas** $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um **máximo local**.
- Se $D < 0$, então $f(a, b)$ **não é mínimo local nem máximo local** (ponto de sela).
- Entretanto, Se $D = 0$, não há nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela.

Valores máximo e mínimo absolutos

Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis

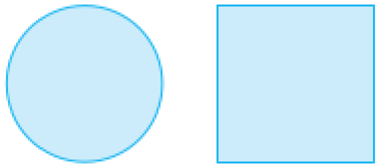
Se f é contínua em um conjunto fechado[1] e limitado[2] D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

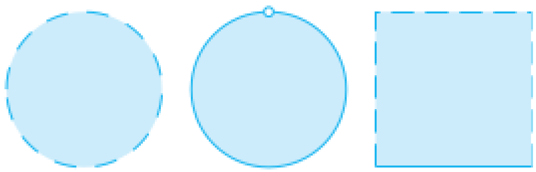
1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o **valor máximo absoluto**; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

---

1. Um conjunto fechado é aquele que contém *todos* os seus pontos da fronteira. ↩



(a) Conjuntos fechados



(b) Conjuntos que não são fechados

2. Um **conjunto limitado** é aquele finito em extensão. ↩