Lógica elementar

Respostas à 1ª lista de exercícios

1.

(a) $(q \wedge \neg r) \to p$

"*Se o céu está estrelado e não está fazendo frio então Eva vai sair para uma caminhada*"

(b) $q \to (\neg r \to p)$

A proposição acima equivale à $q \to (r \vee p)$, conforme demonstra a seguinte **tabela verdade**:

r	p	$\neg r \ \to p$	$r \vee p$
F	F	F	F
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	V	V

Logo, a oração fica: "*Se o céu está estrelado então está fazendo frio ou Eva vai sair para uma caminhada*."

(c) $\neg(p \iff (q \vee r))$

Abordemos a proposição em partes:

- $p \iff (q \vee r)$: Eva vai sair para uma caminhada se, e somente se, o céu está estrelado ou está fazendo frio.
- $\neg(p \iff (q \vee r))$ (a negação da proposta anterior): Eva **não** vai sair para uma caminhada se, e somente se, o céu está estrelado ou está fazendo frio.

(d) $p \iff q$

(e) $(r \wedge \neg q) \to \neg p$

(f) $r \wedge p$

2.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
F	F	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
V	V	V	V

3.

Se q é uma tautologia, $q \equiv V$ sempre. Enquanto, se r é uma contradição, $r \equiv F$ sempre. Logo,

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$
V	V	F	V	F
F	V	F	V	F

4.

(a) Nota-se que o valor verdade de tais proposições são equivalentes na tabela verdade:

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
F	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	V	V	F	F
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F

(b) Tal qual anterioremente,

p	q	r	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	V	V	V	V
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V

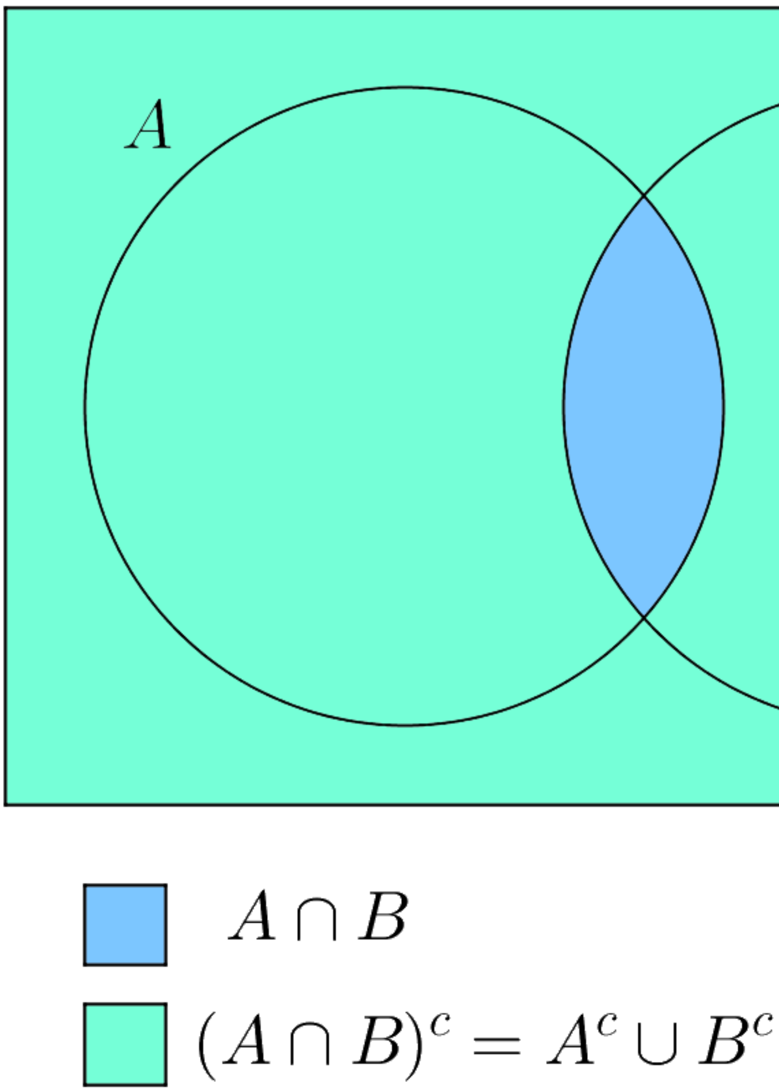
5.

Demonstração da segunda lei de Morgan:

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

6.

A Lei de Morgan aplica-se de maneira equivalente na teoria dos conjuntos e na lógica proposicional. Veja que o complemento à intercessão entre dois conjuntos A e B é a união dos complementos de A e B:



Assim o sendo, para n conjuntos P tem-se que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} {P_i}^c$$

e também:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} {P_i}^c$$

7.

(a) Tautologia

p	q	$(p \to q) \lor p$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

(b) Reescrevendo a equação em termos de $\land$ e $\lor$:

$$\begin{aligned}
&(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \equiv \\
&\neg(\neg p \lor (\neg q \lor r)) \lor (\neg(\neg p \lor q) \lor (\neg p \lor r)) \equiv \\
&(p \land \neg(\neg q \lor r)) \lor ((p \land q) \lor (\neg p \lor r)) \equiv \\
&(p \land (q \land \neg r)) \lor ((p \land q) \lor (\neg p \lor r)) \equiv \\
&((p \land q) \land (p \land \neg r)) \lor ((p \land q) \lor (\neg p \lor r))
\end{aligned}$$

p	q	r	$((p \land q) \land (p \land \neg r)) \lor ((p \land q) \lor (\neg p \lor r))$
F	F	F	$(F \land F) \lor (F \lor V) \equiv V$
F	V	F	$(F \land F) \lor (F \lor V) \equiv V$
F	F	V	$(F \land F) \lor (F \lor V) \equiv V$
F	V	V	$(F \land F) \lor (F \lor V) \equiv V$
V	V	V	$(V \land F) \lor (V \lor V) \equiv V$
V	V	F	$(V \land V) \lor (V \lor F) \equiv V$
V	F	V	$(F \land F) \lor (F \lor V) \equiv V$
V	F	F	$(F \land V) \lor (F \lor V) \equiv V$

8.

p	$p \lor \neg p$	$p \land \neg p$
F	$F \lor V \equiv V$	$F \land V \equiv F$
V	$V \lor F \equiv V$	$V \land F \equiv F$

9.

$p \to (q \to r) \equiv \neg p \lor (\neg q \lor r) \equiv \neg(p \land q) \lor (\neg p \lor r)$
$(p \to q) \to r \equiv \neg(\neg p \lor q) \lor r \equiv (p \land \neg q) \lor r \equiv (p \lor r) \land (r \lor \neg q)$

p	q	r	$\neg(p \land q) \lor (\neg p \lor r)$	$(p \lor r) \land (r \lor \neg q)$
F	F	F	$V \lor V \equiv V$	$F \land V \equiv F$
F	V	F	$V \lor V \equiv V$	$F \land F \equiv F$
F	F	V	$V \lor V \equiv V$	$V \land V \equiv V$
F	V	V	$V \lor V \equiv V$	$V \land V \equiv V$
V	V	V	$F \lor V \equiv V$	$V \land V \equiv V$
V	V	F	$F \lor F \equiv F$	$V \land F \equiv F$
V	F	V	$V \lor V \equiv V$	$V \land V \equiv V$
V	F	F	$V \lor F \equiv V$	$V \land V \equiv V$

10.

Conforme a seguinte tabela verdade, isso pode ser feito de duas formas: reunindo-se apenas com o representante turco ou, senão, apenas com os representantes turco e russo.

a	t	r	$(a \land \neg t) \lor (\neg a \land t)$	$(r \lor t)$	$\neg(a \land r)$
F	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V

11.

O **princípio da equivalência** descreve que para quaisquer proposições p e q equivalentes entre si que contenham os conectivos $\neg$, $\land$ ou $\lor$, mas não necessariamente todos, as proposições **duais** destas (proposições obtidas pela substituição de cada $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa; e de cada constante V por F e vice versa) também são equivalentes entre si.

Por exemplo,

$p \wedge (p \vee p) \iff p$

Como, por hipótese, temos que $p \equiv q$, então

$p \wedge (p \vee q) \iff p$

Podemos ainda adicionar à formulação anterior o elemento neutro $\vee F$:

$(p \vee F) \wedge (p \vee q) \iff p$

E então simplificá-la:

$\underbrace{p \vee \underbrace{(F \wedge q)}_{\text{Identidade}}}_{\text{Distributiva}} \iff p$

$p \vee F \iff p$
$p \iff p$

Consideremos agora a formulação dual deste mesmo teorema: $p \vee (p \wedge q) \iff p$
$(p \wedge V) \vee (p \wedge q) \iff p$
$p \wedge (V \vee q) \iff p$
$p \wedge V \iff p$
$p \iff p$

Fica demonstrado que realizando as substituições propostas, "duais", alcançamos resultados equivalentes.

12.

Podemos descrever o XOR em termos de conjunção e disjunção da seguinte forma:

$$p \veebar q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Assim, para este temos a seguinte tabela verdade:

p	q	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
F	V	V
F	F	F
V	V	F
V	F	V

13.

(a) Vamos simplificar a proposição e admitir que esta seja falsa:

$$(p \iff (\neg q \vee r)) \to (\neg p \to q) \equiv (p \iff (\neg q \vee r)) \to (p \vee q) \equiv F$$

Analizemos a tabela verdade para identificar os valores de $(p \iff (\neg q \vee r))$ e $(p \vee q)$ que levam a este resultado:

$(p \iff (\neg q \vee r))$	$(p \vee q)$	$(p \iff (\neg q \vee r)) \to (p \vee q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Apenas quando $(p \iff (\neg q \vee r)) \equiv V$ e $(p \vee q) \equiv F$ obtêm-se tal resultado. Para $(p \vee q) \equiv F, p \equiv q \equiv F$. Substituindo estes valores, temos:

$$(F \iff (\neg F \vee r)) \equiv V$$
$$(F \iff (V \vee r)) \equiv V$$
$$F \iff V \equiv V$$

Chegamos a um absurdo. Assim o sendo, não é possível que esta expressão seja falsa: trata-se de uma **tautologia**.

(b) $(p \to (q \vee r)) \vee (p \vee q) \equiv (p \to q) \vee (p \to r) \cancel{\vee (p \to q)} \equiv p \to (q \vee r) \equiv F$

Para produzir esse resultado bastaria que $p \equiv V$ e $q \equiv r \equiv F$. Qualquer outra configuração não produziria resultado verdadeiro. Não se reduziu ao absurdo, esta não se trata de uma tautologia ou contradição.

14.

(a) $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

(b) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

(c) $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

(d) $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$

(e) $p \vee q \equiv \neg p \to q$

15.

(a)

p	q	$p \uparrow q$	$\neg p \uparrow \neg q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	F

(b)

$$\neg p \iff p \uparrow p$$

$$p \wedge q \iff (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \iff (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

(c)

$$(p \to q) \iff p \uparrow (q \uparrow q) \iff p \uparrow (p \uparrow q)$$

$$(p \iff q) \iff (p \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$$

16.

(a) $(p \iff (((\neg q) \vee r) \to p)) \equiv$
$p \iff ((\neg q \vee r) \to p) \equiv$
$(p \iff \neg q \vee r) \to (p \iff p) \equiv$
$p \iff \neg q \vee r \quad \underbrace{\to p}_{\text{redundante}} \quad \equiv$
$p \iff \neg q \vee r$

(b) Como assim? O próprio enunciado demonstrou.