**Universidade de São Paulo**
**Escola de Artes, Ciências e Humanidades**

**ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2021**
**Professor: José Ricardo G. Mendonça**

**2ª Lista de Exercícios – Quantificadores e Estratégias de Demonstração – 15 set. 2021**

*Logic, logic, logic. Logic is the beginning of wisdom, Valeris, not the end.*
Dr. Spock, in *Star Trek VI: The Undiscovered Country* (1992)

## Problemas

### I. Funções proposicionais e quantificadores

1. Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$. Determine o valor verdade das seguintes proposições:

$$(a)\ (\exists x \in A)\,(x+3=10); \qquad (b)\ (\forall x \in A)\,(x+3<10);$$

$$(c)\ (\exists x \in A)\,(x+3 \leqslant 5); \qquad (d)\ (\forall x \in A)\,(x+3<7).$$

2. Seja $A = \{1,2,3\}$. Determine o valor verdade das seguintes proposições:

   $(a)$ $(\exists x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x^2 < y+1)$;

   $(b)$ $(\forall x \in A)\,(\exists y \in A)\,(x^2 + y^2 < 12)$;

   $(c)$ $(\forall x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x^2 + y^2 < 12)$.

3. Estabeleça a negação das seguintes proposições, onde $P$ e $Q$ são duas funções proposicionais bem definidas quaisquer:

   $(a)$ $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,P(x,y)$;

   $(b)$ $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,P(x,y)$;

   $(c)$ $(\exists y \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall z \in \mathbb{R})(P(x,y) \wedge Q(x,z))$.

4. Estabeleça a negação das seguintes proposições:

   $(a)$ Todos os estudantes de SI da EACH são do sexo masculino;

   $(b)$ Alguns estudantes de GPP da EACH têm 25 anos ou mais;

   $(c)$ Todos os estudantes da EACH moram na ZL.

5. Descreva em palavras, determine o valor verdade e estabeleça as negações das seguintes proposições:

    $(a)$ $(\forall a \in \mathbb{Z})\,(\exists b \in \mathbb{Z})\,(a < b)$;

    $(b)$ $(\exists b \in \mathbb{Z})\,(\forall a \in \mathbb{Z})\,(a < b)$.

6. Descreva as seguintes proposições usando quantificadores:

    $(a)$ Existem pelo menos três números inteiros distintos que satisfazem a propriedade $P$;

    $(b)$ Existem no máximo três números inteiros distintos que satisfazem a propriedade $P$.

7. A definição de convergência de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números reais para um limite $x$, normalmente denotada por $\lim x_n = x$ ou, abreviadamente, $x_n \to x$, é a seguinte: “para todo número real positivo $\varepsilon$, existe um número inteiro $N$ tal que para todo número inteiro $n > N$ temos que $x_n$ difere de $x$ por menos do que $\varepsilon$”. Escreva essa definição usando os devidos quantificadores e proposições.

8. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais. Estabeleça a negação formal da proposição “para todo $s$ em $\mathbb{R}$, existe um $r$ em $\mathbb{R}$ tal que se $f(r) > 0$ então $g(s) > 0$.” Interprete o conteúdo matemático dessa proposição.

## II. Estratégias de demonstração

1. O *princípio do pombal* é um teorema simples que no entanto possui enorme utilidade em toda a matemática. Seu enunciado é o seguinte:[a]

    ***Teorema****: Sejam $n$ e $k$ dois números naturais. Se tentarmos distribuir $n > k$ objetos em $k$ urnas, pelo menos uma das urnas conterá mais de um objeto.*

    Demonstre o princípio do pombal por contraposição.

2. Mostre que se a soma dos dígitos de um número $n \in \mathbb{N}$ qualquer é divisível por 9 então $n$ é divisível por 9 e vice-versa, isto é, que se $n \in \mathbb{N}$ é divisível por 9 então a soma de seus dígitos é divisível por 9. Notação: se um número $n$ é divisível pelo número $d$ escrevemos $d \mid n$, que se lê “$d$ divide $n$”.

3. Para um dado $n \in \mathbb{Z}$, mostre $(a)$ de forma direta e $(b)$ por contraposição que se $n^2$ é par, então $n$ é par. Qual das duas demonstrações lhe parece mais objetiva e compreensível?

4. Mostre que todo número primo $p > 3$ é da forma $3k - 1$ ou $3k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

---

[a] A formulação do princípio do pombal costuma ser atribuída ao matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) por volta de 1842, embora haja evidências de que o princípio fosse conhecido anteriormente. Dirichlet se referia ao princípio do pombal como *Schubfachprinzip*, ou “princípio da gaveta”, em alemão.

5. Um aluno metido a espertinho demonstrou o seguinte "lema": sabemos que $-2 < 1$; elevando ambos os lados dessa inequação ao quadrado concluímos que $4 < 1$. O que há de errado com essa "demonstração"?

6. Prove ou disprove (e neste caso, se for possível corrija) as seguintes proposições:

   ($a$) $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n$ é ímpar então $n^2 + 4n$ é ímpar;

   ($b$) $\forall r \in \mathbb{R}$, se $r^2$ é irracional então $r$ é irracional;

   ($c$) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^5 < 5^n$;

   ($d$) $\forall r \in (-1, \infty)$, $(1+r)^n \geqslant 1 + nr$ (desigualdade de Bernoulli). Porque podemos dizer que essa desigualdade é trivial para $r > 0$?

7. Estabeleça os seguintes resultados usando o princípio de indução finita:

   ($a$) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$ para todo $n \geqslant 1$;

   ($b$) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$ para todo $n \geqslant 1$. Essa identidade quase milagrosa é conhecida como identidade de Nicômaco de Gerasa (*ca.* 60 – *ca.* 120);

   ($c$) Dados $n \geqslant 2$ números $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ quaisquer, não todos nulos,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)}.$$

8. Mostre por indução finita que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ para todo $n \geqslant 1$, onde $i$ é a unidade imaginária que satisfaz $i^2 = -1$. Esse resultado é conhecido como teorema de De Moivre. Repita a demonstração usando a identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

9. Mostre por indução finita que para todo $n \geqslant 1$,

$$H_n(x) = e^{x^2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n e^{-x^2}$$

   é um polinômio de grau $n$. O que podemos dizer sobre a paridade de $H_n(x)$? Os polinômios de Hermite $H_n(x)$ formam uma importante família de funções na análise matemática; eles aparecem, por exemplo, em análise numérica (integração gaussiana) e na solução da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico quântico.

10. Mostre que para todo conjunto de $n \geqslant 1$ funções diferenciáveis $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ vale

$$\frac{(f_1(x)\cdots f_n(x))'}{f_1(x)\cdots f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

11. Existem inúmeras demonstrações de que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Uma delas consiste em reparar que o último dígito não-nulo de um número inteiro ao quadrado escrito na base 3 deve ser 1, de maneira que a equação $a^2 = 2b^2$ com $a, b \in \mathbb{N}^*$ é impossível. Formalize esse argumento como um lema e um teorema e dê as suas respectivas demonstrações.

12. Em aula demonstramos que se $a$ e $b$ são números irracionais, então $a^b$ pode ser racional analisando o caso em que $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$.[(b)] Mostre, pelo mesmo método, que se $a$ e $b$ são números irracionais, então $a^b$ pode ser irracional. Dica: $1 + \sqrt{2}$ é irracional.

## III. *Divertissement*: O significado do conectivo "ou" em lógica

O significado do conectivo lógico "ou" costuma causar confusão, pois enquanto na lógica formal ele possui um significado preciso, na linguagem cotidiana "ou" possui pelo menos dois significados distintos cuja interpretação geralmente depende de contexto, isto é, de conhecimento sobre o significado das proposições que estão sendo conectadas pelo "ou", algo que não pode ser considerado em linguagens formais. Em primeiro lugar, devemos concordar se interpretamos "A ou B" no sentido exclusivo de "ou A ou B mas não ambos" ou no sentido inclusivo de "ou A ou B ou ambos". Em português normalmente usamos o "ou" exclusivo. Em documentos jurídicos é comum encontrar o "ou" inclusivo expresso pelo barbarismo "A e/ou B". Em alguns idiomas existem palavras diferentes para o "ou" exclusivo e inclusivo. Por exemplo, em latim, a palavra *aut* denota um ou exclusivo, como em *disce aut discede* (aprenda ou saia), enquanto *vel* denota um "ou" inclusivo, como em *habere vel vim vel laetitia* (ter força ou alegria). É provável que o símbolo matemático "$\vee$" usado para denotar o conectivo lógico "ou" inclusivo tenha se originado da primeira letra da palavra latina *vel* para tal conectivo.

A seguir reproduzimos um trecho do livro de Alfred Tarski, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, 4a. ed. (Oxford: Oxford University Press, 1994), §8, pp. 18–21, sobre o significado do conectivo "ou" em lógica:[(c)]

> *Now, in everyday language, the word "or" has at least two different meanings. Taken in the so-called* ***non-exclusive meaning****, the disjunction of two sentences expresses only that at least one of these sentences is true, without saying anything as to whether or not*

---

[(b)] Em 1934, os matemáticos Alexander Osipovich Gelfond (1906–1968) e Theodor Schneider (1911–1988) mostraram, independentemente, que se $a$ e $b$ são números algébricos com $a \neq 0, 1$ e $b$ irracional, então $a^b$ é um número transcendental (portanto irracional). Se a restrição de que $a$ e $b$ sejam algébricos for removida a afirmação deixa de ser verdadeira em geral. Por exemplo, vimos que $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$; aqui, $b = \sqrt{2}$ é um número algébrico, mas $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ não é, de forma que o resultado mencionado anteriormente não vale neste caso. O número transcendental $2^{\sqrt{2}} = 2.665144\cdots$ é conhecido como constante de Gelfond-Schneider.

[(c)] Alfred Tarski (1901–1983), logicista, matemático e filósofo da ciência de origem polonesa (depois naturalizado norte-mericano) foi um dos principais contribuidores e analistas do desenvolvimento da lógica no século XX. Sua teoria da verdade em linguagens formais é ainda hoje estudada e debatida nos meios acadêmicos.

*both sentences may be true; taken in another meaning, known as the* ***exclusive*** *one, the disjunction of two sentences asserts that one of the sentences is true but that the other is false. To illustrate, let us suppose we see the following notice put up in a bookstore:*

*"Customers who are teachers or college students are entitled to a special reduction."*

*Here the word "or" is undoubtedly used in the first meaning, since one would not refuse the reduction to a teacher who is at the same time a college student. On the other hand, if a child has asked to be taken on a hike in the morning and to a theater in the afternoon, and we reply: no, we shall go on a hike or we shall go to the theater, then our usage of the word "or" is obviously of the second kind, since we intend to comply with only one of the two requests. In logic and in mathematics the word "or" is used always in the first, non exclusive meaning; the disjunction of two sentences is considered true if at least one of its members is true, and otherwise false. (...) In order to avoid misunderstandings it would be expedient, in everyday as well as in scientific language, to use the word "or" by itself only in the first meaning, and to replace it by the compound expression "either... or..." whenever the second meaning is intended.*

*(...)*

*When creators of contemporary logic were introducing the word "or" into their considerations, they desired, perhaps subconsciously, to simplify its meaning; in particular, they endeavored to render this meaning clearer and independent of all psychological factors, especially of the presence or absence of knowledge. Consequently, they decided to extend the usage of the word "or", and to consider the disjunction of any two sentences as a meaningful whole, even when no connection between their contents or forms should exist (...). Therefore, a person using the word "or" according to contemporary logic will consider the expression (...) "*$2 \cdot 2 = 5$ *or New York is a large city" as a meaningful and in fact a true sentence, since its second part is surely true.*

Uma anedota histórica acerca da disjunção lógica "ou" envolvendo o filósofo britânico Bertrand Russell (1872–1970) conta que quando Russell teve seu primeiro filho, John Conrad Russell (1921–1987), com sua segunda esposa Dora Black (1894–1986), um colega veio felicitá-lo dizendo "Parabéns, Bertie! É uma menina ou um menino?", ao que Russell respondeu, "Sim, claro, o que mais poderia ser?".

⋆ — ⋆ — ⋆

**O dominó da indução finita**: se você mostrar que a proposição vale para $n = 1$ (derrubar o primeiro dominó) e que se ela vale para $n = k$ (a hipótese de indução) então vale para $n = k + 1$ também (o passo de indução), então a proposição vale para todo $n$ (todo dominó em queda atinge o próximo e todos eles caem).