Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2021
Professor: José Ricardo G. Mendonça

3ª Lista de Exercícios – Teoria Elementar dos Conjuntos – 06 out. 2021

No one shall expel us from the Paradise that Cantor has created.
David Hilbert (1862–1943)

Problemas

I. Teoria dos conjuntos

Nos problemas a seguir usamos a notação $\overline{A} = \{x\colon x \notin A\}$ para o conjunto complementar $\Omega \setminus A$, onde $A \setminus B = \{x\colon x \in A,\ x \notin B\}$ denota a diferença entre dois conjuntos A e B quaisquer.

1. Descreva os seguintes conjuntos verbalmente:

   (a) $S = \{\text{Mercúrio, Vênus, } \ldots, \text{ Netuno}\}$;

   (b) $S = \{\text{Acre, Alagoas, Amapá, } \ldots, \text{ Tocantins}\}$;

   (c) $S = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$;

   (d) $S = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$;

   (e) $S = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.

2. Seja A o conjunto de todos os cidadãos argentinos, B o conjunto de todos os residentes no Brasil, e C o conjunto de todas as mulheres do mundo. Descreva os seguintes conjuntos verbalmente: $A \cap B \cap C$, $B \setminus A$, $C \setminus A$, $C \setminus B$ e $B \setminus C$.

3. Escreva todos os subconjuntos de $S = \{a, b, c, d\}$.

4. Quantos subconjuntos de 2 elementos um conjunto finito de 5 elementos possui?

5. Mostre que se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

6. Se $A \subseteq B$, mostre que $A \cup C \subseteq B \cup C$ para qualquer conjunto C.

7. Mostre que o conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto, inclusive dele próprio.

8. Mostre que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Desenhe os diagramas de Venn desses conjuntos (dois lados da identidade).

9. Demonstre as propriedades associativas: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

10. Demonstre as propriedades distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

11. Mostre as leis de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Faça diagramas de Venn para visualizar essas relações.

12. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto universo dos conjuntos $A = \{n\colon\, n \leqslant 6\}$, $B = \{n\colon\, 4 \leqslant n \leqslant 9\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$ e $D = \{2,3,5,7,8\}$. Encontre:

    (a) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, a diferença simétrica entre os conjuntos A e B;

    (b) $B \triangle C$;

    (c) $A \cap (B \triangle D)$;

    (d) $(A \cap B) \triangle (A \cap D)$.

13. Sejam A, B, e C subconjuntos finitos quaisquer de um conjunto universo Ω. Desenhe o diagrama de Venn da diferença simétrica $A \triangle B \triangle C$.

14. Para dois conjuntos quaisquer A e B, sejam as operações binárias $\oplus$ e $*$ definidas por $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ e $A * B = A \cap B$. Mostre que valem as seguintes relações:

    (a) $A \oplus B = B \oplus A$;

    (b) $A \oplus B = \overline{A} \oplus \overline{B}$;

    (c) $A \oplus \varnothing = A$;

    (d) $A \oplus A = \varnothing$;

    (e) $A * A = A$;

    (f) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;

    (g) Se $A \oplus B = A \oplus C$ então $B = C$;

    (h) $A * (B \oplus C) = (A * B) \oplus (A * C)$.

15. Sejam dados n subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ quaisquer de um determinado conjunto universo Ω. Um *produto fundamental* desses conjuntos é um conjunto na forma $A_1^* \cap \cdots \cap A_n^*$, onde $A_i^* = A_i$ ou $\overline{A}_i$. Mostre que:

    (a) Existem exatamente 2^n produtos fundamentais distintos;

    (b) Dois produtos fundamentais quaisquer distintos são disjuntos;

    (c) O conjunto universo Ω é dado pela união de todos os produtos fundamentais.

Dica: estude um caso pequeno (por exemplo, com $n = 3$) usando diagramas de Venn.

16. Mostre que um conjunto S de n elementos possui 2^n subconjuntos. Se $0 < m \leqslant n$, quantos subconjuntos de S possuem exatamente m elementos?

17. Seja $|A|$ o número de elementos de um conjunto finito A. Mostre, usando diagramas de Venn, que para dois conjuntos finitos quaisquer A e B vale $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

18. Encontre uma expressão para $|A \cup B \cup C|$ e $|A \cup B \cup C \cup D|$ para conjuntos A, B, C e D quaisquer.

19. Se A e B são dois conjuntos quaisquer, mostre que $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$ e que $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$. Repare que se A e B são dois conjuntos não-vazios disjuntos, então $A \cup B \notin \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$, de forma que a igualidade no segundo caso raramente vale.

20. Uma pesquisa (IBOPE, 2015) mostrou que 79% dos brasileiros se consideram religiosos (acima da média mundial, que é de 63%), enquanto outra pesquisa (CNI, 2015) mostrou que 74% deles nunca fizeram compras *online*. Mostre que o percentual de brasileiros que se consideram religiosos e nunca fizeram compras *online* é maior que 50%.

21. Quantos números inteiros $1 \leqslant n \leqslant 100$ são divisíveis por 2 e também por 3 ou 5?

II. *Divertissement*: O princípio da inclusão-exclusão

Vimos que para dois conjuntos quaisquer A e B vale a relação $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. A generalização desse processo de contagem para n conjuntos, $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$, dá origem a um princípio bastante geral e de enorme aplicação conhecido como ***princípio da inclusão-exclusão***, normalmente abreviado por "PIE" (inclusive em inglês). Esse princípio também é conhecido como ***fórmula do crivo***.

O "princípio" por trás do PIE para contar corretamente o número de elementos em $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ consiste em primeiro superestimar grosseiramente o número de elementos na união, em seguida realizar uma correção simples da estimativa, depois corrigir a correção e assim por diante até não restar nenhum elemento contado mais de uma vez. Uma das características mais evidentes dos resultados obtidos através do PIE é a presença de somas de termos com sinais alternados.

O seguinte teorema estabelece rigorosamente uma das formas do princípio da inclusão-exclusão.

Teorema. *Suponha que temos N objetos e que cada objeto pode possuir ou não uma ou mais das propriedades $a_1, \ldots, a_r$. Denotando o número de objetos com as $k \leqslant r$ propriedades $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ por $N(a_{i_1} \cdots a_{i_k})$, o número de objetos que não possuem qualquer das propriedades $a_1, \ldots, a_r$ é dado por*

$$N_0 = N - \sum_{i_1} N(a_{i_1}) + \sum_{i_1 < i_2} N(a_{i_1} a_{i_2}) - \cdots + (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} N(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) + \cdots + (-1)^r N(a_1 \cdots a_r),$$

onde cada i_k assume todos os valores possíveis $1, \ldots, r$.

Demonstração. Um objeto que não possui qualquer das propriedades é contado uma única vez no termo N do lado direito da identidade proposta e não contribui para os termos restantes. Um objeto que possui somente uma das propriedades, por sua vez, é contado uma vez em N e uma vez em $\sum_{i_1} N(a_{i_1})$ e, portanto, contribui com $1-1=0$ para N_0. Já um objeto que possui exatamente $m \geqslant 2$ propriedades é contado uma vez no termo N, m vezes no termo $\sum_{i_1} N(a_{i_1})$, $\binom{m}{2}$ vezes no termo $\sum_{i_1<i_2} N(a_{i_1}a_{i_2})$ e assim sucessivamente, isto é, ele é contado $\binom{m}{k}$ vezes em cada termo $\sum_{i_1<\cdots<i_k} N(a_{i_1}\cdots a_{i_k})$. A contribuição total desse objeto para N_0 vale, portanto,

$$1-m+\binom{m}{2}-\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}=(1-1)^m=0,$$

pelo teorema binomial. Dessa forma, N_0 conta somente os objetos que não possuem qualquer das propriedades $a_1,\ldots,a_r$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo. Vamos dar um exemplo de aplicação do PIE nessa forma. Seja uma coleção de 50 pedras semipreciosas das quais 25 são translúcidas (T), 30 são vermelhas (V), 20 são redondas (R), 18 são translúcidas e vermelhas (TV), 12 são translúcidas e redondas (TR), 15 são vermelhas e redondas (VR) e 8 são translúcidas, vermelhas e redondas (TVR). Quantas pedras não são nem translúcidas, nem vermelhas, nem redondas? Uma aplicação direta do PIE fornece

$$\begin{aligned} N_0 &= N-N(T)-N(V)-N(R)+N(TV)+N(TR)+N(VR)-N(TVR) \\ &= 50-25-30-20+18+12+15-8=12. \end{aligned}$$

Outra maneira de resolver esse problema relativamente simples seria desenhar os diagramas de Venn dos diversos conjuntos T, V e R e suas interseções, conforme figura 1.

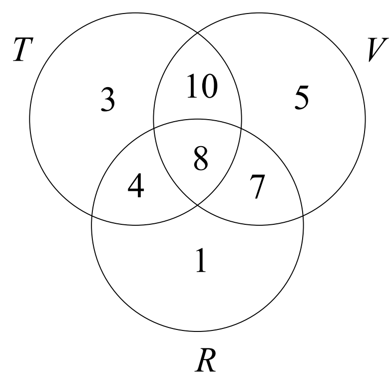

Figura 1: Solução gráfica do exemplo em termos de diagramas de Venn. Como a soma dos números que aparecem em cada subconjunto disjunto do diagrama vale 38, temos $50-38=12$ pedras que não aparecem em nenhuma dessas categorias (T, V ou R ou suas combinações).

Como a solução acima usando diagramas de Venn sugere, podemos interpretar o PIE em termos conjuntistas da seguinte forma. Suponha que $A_1,\ldots,A_r$ sejam subconjuntos de um conjunto

Ω tais que $A_i = \{x \in \Omega\colon x$ possui a propriedade $a_i\}$. Quantos elementos não possuem qualquer das propriedades a_i? Esses são os elementos que estão em $\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_r$. Para contá-los tomamos todos os elementos de Ω e subtraímos os elementos que estão em pelo menos um A_i, adicionamos aqueles que estão em pelo menos dois A_i's, subtraímos aqueles que aparecem em pelo menos três A_i's etc. e daí ficamos com

$$\left|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_r\right| = |\Omega| - \sum_{i_1} |A_{i_1}| + \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \cdots + (-1)^r |A_1 \cap \cdots \cap A_r|.$$

Às vezes o lado direito da expressão acima é denotada de maneira mais compacta como

$$\sum_{J \subseteq [n]} (-1)^{|J|} |A_J|,$$

onde $[n] := \{1, \ldots, n\}$, uma notação usual em matemática discreta, e $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$, com $A_\varnothing = \Omega$. A fórmula do PIE talvez mais conhecida, principalmente em contextos elementares, é aquela usada para determinar o número de objetos que *possuem* pelo menos uma das propriedades $a_1, \ldots, a_r$, isto é, para calcular $|A_1 \cup \cdots \cup A_r|$. Como $\Omega = (A_1 \cup \cdots \cup A_r) \cup (\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_r})$ e $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_r} = \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_r$, encontramos $|A_1 \cup \cdots \cup A_r| = |\Omega| - \left|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_r\right|$ e daí

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_r| = \sum_{i_1} |A_{i_1}| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_r|,$$

que generaliza a expressão $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ para dois conjuntos A e B quaisquer.

Uma forma simbólica para o PIE

Podemos obter a fórmula do PIE através de um método conhecido como ***método simbólico***. Dados N objetos que podem possuir ou não uma ou mais das propriedades $a_1, \ldots, a_r$ e denotando o número de objetos com as $k \leqslant r$ propriedades $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ por $N(a_{i_1} \cdots a_{i_k})$, podemos denotar simbolicamente o número de objetos que não possuem qualquer das propriedades $a_1, \ldots, a_r$ por

$$N_0 = N(a_1' \cdots a_r') = N((1 - a_1) \cdots (1 - a_r)),$$

onde a_i significa "possui a propriedade i" e $a_i' = 1 - a_i$ significa "não possui a propriedade i". Expandindo o produto $(1 - a_1) \cdots (1 - a_r)$ encontramos

$$N_0 = N(a_1' \cdots a_r') = N(1 - a_1 - \cdots - a_r + a_1 a_2 + \cdots + a_{r-1} a_r - \cdots + (-1)^r a_1 \cdots a_r),$$

e atuando linearmente com o "operador" N sobre a soma ficamos com

$$N_0 = N - N(a_1) - \cdots - N(a_r) + N(a_1 a_2) + \cdots + N(a_{r-1} a_r) - \cdots + (-1)^r N(a_1 \cdots a_r),$$

onde colocamos $N(1) = N$. Essa é exatamente a mesma expressão que encontramos inicialmente para o PIE. Algumas dessas expressões, assim como diversas extensões e exemplos de aplicação, foram primeiramente obtidas nessa forma pelo matemático norte-americano Hassler Whitney (1907–1989) no início dos anos 1930.[(a)]

Uma das vantagens do método simbólico é que podemos considerar o número de objetos que possuem as propriedades $a_{i_1}, \cdots, a_{i_p}$ e não possuem as propriedades $a_{j_1}, \cdots, a_{j_q}$, com $p+q=r$, de maneira relativamente trivial: basta considerar

$$N(a_{i_1}\cdots a_{i_p}a'_{j_1}\cdots a'_{j_q}) = N(a_{i_1}\cdots a_{i_p}(1-a_{j_1})\cdots(1-a_{j_q})).$$

Por exemplo, se queremos calcular o número de objetos com as propriedades a_1 e a_3 e sem as propriedades a_2 e a_4 calculamos

$$N(a_1a'_2a_3a'_4) = N(a_1(1-a_2)a_3(1-a_4)) = N(a_1a_3) - N(a_1a_2a_3) - N(a_1a_3a_4) + N(a_1a_2a_3a_4).$$

Uma vez obtida a expressão desejada, calculamos os termos $N(a_{i_1}\cdots a_{i_p})$ como $\left|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_p}\right|$.

PIE e o cálculo de permanentes

Uma das aplicações relativamente recentes (últimos $\sim$ 60 anos) mais impressionantes do PIE foi dada por Herbert John Ryser (1923–1985) de maneira despretensiosa em um conjunto de notas de aula publicadas sob o título *Combinatorial Mathematics* como o volume 14 da *The Carus Mathematical Monographs* (Mathematical Association of America, Washington, DC, 1963). Nessas notas, usando o PIE Ryser estabeleceu uma fórmula para o cálculo exato do ***permanente*** de uma matriz que era mais eficiente do que todos os outros métodos conhecidos até então e, exceto por algumas melhorias incrementais, até hoje. Permanentes aparecem frequentemente em problemas combinatoriais (por exemplo, design de experimentos, permutações com restrições, teoria das partições, *tilings* etc.), no estudo de processos estocásticos espaciais e na descrição de sistemas de muitos férmions em mecânica quântica, entre outros. Em particular, permanentes estão intimamente ligado a um problema computacional de grande relevância tanto teórica quanto prática conhecido como "emparelhamento perfeito" (*perfect matching*).

O permanente de uma matriz quadrada qualquer $A = (a_{ij})$ de ordem n é dado por[(b)]

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma\in S}\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

onde a soma é sobre todas as $n!$ permutações (bijeções) $\sigma\colon \{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$. Vemos dessa expressão que a fórmula para $\operatorname{per}(A)$ é semelhante à fórmula para o determinante de A,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S}(-1)^{\sigma}\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

[(a)] H. Whitney, "A logical expansion in mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society* **38** (8), 572–579 (1932).

[(b)] Uma exposição acessível das propriedades dos permanentes é dada em M. Marcus e H. Minc, "Permanents", *The American Mathematical Monthly* **72** (6), 577–591 (1965). Veja também o artigo da Wikipedia "Permanent (mathematics)".

sem os "sinais de menos" $(-1)^\sigma$.[(c)] Essa diferença aparentemente inocente, no entanto, é fatal. Por exemplo, embora a expansão de Laplace por linhas ou colunas para determinantes tenha uma contrapartida simples para permanentes e $\mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(A^T)$, a propriedade multiplicativa $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ não vale para permanentes. Além disso, a adição de um múltiplo de uma linha de A a outra não deixa $\mathrm{per}(A)$ invariante, de forma que enquanto o determinante de uma matriz pode ser calculado por eliminação gaussiana, um método de ordem $O(n^3)$, não podemos usar eliminação gaussiana no cálculo de seu permanente, que em princípio é uma operação de ordem $O(n \cdot n!)$. Ao contrário do determinante, o permanente também é bem definido para uma matriz retangular $A_{m\times n}$, $m < n$, por uma generalização da fórmula dada acima: ao invés de tomar a soma sobre $\sigma \in S$, o conjunto de todas as permutações de $\{1,\ldots,n\}$, basta tomar a soma sobre $\sigma \in \mathrm{Inj}(R,C)$, o conjunto de todas as aplicações injetoras $\sigma\colon R \to C$, onde $R = \{1,\ldots,m\}$, os índices das linhas (do inglês *rows*), e $C = \{1,\ldots,n\}$, os índices das colunas. O número de aplicações injetoras $R \to C$ vale $|\mathrm{Inj}(R,C)| = n(n-1)\cdots(n-m+1) = n!/(n-m)!$.[(d)]

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, $m \leqslant n$, a fórmula de Ryser para o cálculo de seu permanente é dada por

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{n-k}{n-m} \sum_{\substack{J\subseteq C\\ |J|=k}} P(A\,|\,J),$$

onde $P(A\,|\,J)$ é o produto das somas dos elementos das linhas da matriz obtida pela retirada das colunas de A com índices em $C \setminus J$ ou, equivalentemente, da matriz formada pelas colunas de A com índices em J,

$$P(A\,|\,J) = \prod_{i=1}^{m} \sum_{j\in J} a_{ij}.$$

Em particular, se a matriz A for quadrada ($m = n$) obtemos

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{\substack{J\subseteq C\\ |J|=k}} P(A\,|\,J).$$

[(c)] O sinal ou paridade $(-1)^\sigma$ de uma permutação σ, também denotado por $\mathrm{sgn}(\sigma)$ ou $\varepsilon(\sigma)$, entre outros, é dado pela paridade de seu número de inversões $\sigma(i) > \sigma(j)$ com $i < j$. Por exemplo, o sinal de $\sigma = (2314)$ vale $(-1)^\sigma = 1$, pois σ possui duas inversões, $\sigma(1) > \sigma(3)$ e $\sigma(2) > \sigma(3)$; já para $\sigma = (3142)$ temos $(-1)^\sigma = -1$ (verifique).

[(d)] Dado um número inteiro $m \geqslant 0$, definimos a m-ésima ***potência fatorial descendente*** de um número x qualquer por $x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdots(x-m+1)$, com $x^{\underline{0}} = 1$. Por exemplo, $x^{\underline{1}} = x$ e $x^{\underline{2}} = x(x-1)$. Lemos $x^{\underline{m}}$ como "x elevado a m descendente". A definição de $x^{\underline{m}}$ generaliza o conceito de potência $x^m = x\cdot x\cdots x$ para um contexto "discreto". O leitor deve ter encontrado esses números no cálculo do número de k-permutações de n objetos, normalmente denotado por $P_{n,k}$ ou $A_{n,k}$ (de arranjo, um outro nome para permutação), que é uma seleção ordenada de k objetos dentre n objetos possíveis, dado por $P_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^{\underline{k}}$. Outra notação encontrada para a potência fatorial descendente é $(x)_m$, conhecido como símbolo de Pochhammer. Uma exposição acessível acerca das potências fatoriais descendentes (e ascendentes) aparece em D. E. Knuth, "Two notes on notation", *The American Mathematical Monthly* **99** (5), 403–422 (1992). Veja também o artigo da Wikipedia "Falling and rising factorials".

Nesta forma, o método de Ryser requer cerca de $2^n \cdot (n^2/2) = 2^{n-1}n^2$ operações para o cálculo do permanente. Melhorias algorítmicas incrementais posteriores reduziram a complexidade do método de Ryser a cerca de $2^n \cdot (n/2) = 2^{n-1}n$ operações.[e]

Exemplo. Vamos calcular em detalhes o permanente da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

pela fórmula de Ryser. Temos $R = \{1,\ldots,m\} = \{1,2\}$ e $C = \{1,\ldots,n\} = \{1,2,3,4\}$. A soma sobre $k = 1,\ldots,m$ possui portanto dois termos: $k = 1$ e $k = 2$.

Quando $k = 1$, os subconjuntos $J \subseteq C$ com $|J| = 1$ são $J = \{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ e $\{4\}$. Os produtos das somas dos elementos das linhas da matrizes formadas pelas colunas de A com índices em J neste caso valem, respectivamente, 12, 0, 3 e 0. Por exemplo, quando $J = \{1\}$, temos $A\,|\,J = \binom{3}{4}$, de onde obtemos $P(A\,|\,J) = 3 \cdot 4 = 12$. Assim, a contribuição dos termos com $k = 1$ para o permanente é dada por

$$(-1)^{m-k}\binom{n-k}{n-m}\sum_{\substack{J\subseteq C\\|J|=k}} P(A\,|\,J) = (-1)^{2-1}\binom{4-1}{4-2}(12+0+3+0) = -45.$$

Quando $k = 2$, os subconjuntos $J \subseteq C$ com $|J| = 2$ são $J = \{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ e $\{3,4\}$. Os produtos das somas dos elementos das linhas da matrizes formadas pelas colunas de A com índices em J neste caso valem, respectivamente, 9, 28, 4, 2, 2 e -3. Por exemplo, quando $J = \{1,3\}$, temos $A\,|\,J = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de onde obtemos $P(A\,|\,J) = 4 \cdot 7 = 28$. Assim, a contribuição dos termos com $k = 2$ para o permanente é dada por

$$(-1)^{m-k}\binom{n-k}{n-m}\sum_{\substack{J\subseteq C\\|J|=k}} P(A\,|\,J) = (-1)^{2-2}\binom{4-2}{4-2}(9+28+4+2+2-3) = 42.$$

Encontramos, dessa forma, que $\operatorname{per}(A) = -45 + 42 = -3$.

Problema. Encontre o permanente da matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pelo definição de permanente como uma soma sobre permutações e pelo método de Ryser.

Pode-se mostrar que o cálculo do permanente de matrizes formadas somente por elementos 0 e 1 é um problema da classe de complexidade denominada #P-completo (lê-se “*hash*-P

[e] A. Nijenhuis e H. S. Wilf, *Combinatorial Algorithms for Computers and Calculators*, 2a. ed. (New York: Academic Press, 1978), capítulo 23.

completo" ou "*number*-P completo") , o equivalente combinatorial a um problema NP-completo: um algoritmo para resolver um problema #P-completo em tempo polinomial, caso existisse, resolveria o problema P vs. NP, implicando que P = NP. Na verdade, problemas #P-completos são ainda mais difíceis de atacar do que problemas NP-completos: enquanto muitos problemas NP-completos são fáceis de decidir em instâncias aleatórias, esse não parece ser o caso para problemas de enumeração combinatória #P-completos. O algoritmo de Ryser, no entanto, permitiu reduzir a complexidade do cálculo do permanente de $O(n \cdot n!)$ para $O(2^{n-1}n)$, uma redução teórica e prática espetacular. Para $n = 20$, por exemplo, temos $O(n \cdot n!) \sim 4.9 \times 10^{19}$ enquanto $O(2^{n-1}n) \sim 10^7$.

Problema. Implemente a fórmula de Ryser para o cálculo de permanentes com as melhorias algorítmicas sugeridas por Nijenhuis e Wilf e estime sua ordem de complexidade a partir do cálculo do permanente de algumas centenas de matrizes de ordens $n = 4$ a 10.

Embora o cálculo exato do permanente de uma matriz seja um problema em geral #P-completo, o cálculo aproximado do permanente pode ser realizado em tempo polinomial por um algoritmo probabilístico com um erro da ordem de εM, onde M é o valor do permanente e $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Esse é um dos resultados mais fundamentais na área de algoritmos probabilísticos.[f]

⋆ — ⋆ — ⋆

[f] M. Jerrum, A. Sinclair e E. Vigoda, "A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries", *Journal of the ACM* **51** (4), 671–697 (2004).