Resolução da Lista 3 da disciplina de Matemática Discreta

Feita por Guilherme de Abreu Barreto[1]

Teoria dos Conjuntos

Exercício 1

(a) O conjunto dos planetas no Sistema Solar;

(b) O conjunto dos Estados Federativos da República do Brasil.

(c) O conjunto dos números naturais pares;

(d) O conjunto de potências de 2 para qualquer expoente $x \in \mathbb{N} : x \geq 1$;

(e) O conjunto dos números primos.

Exercício 2

$A \cap B \cap C$: o conjunto das argentinas residentes no Brasil;

$B \backslash A$: o conjunto dos residentes no Brasil que não são argentinos;

$C \backslash A$: o conjunto das mulheres no mundo que não são argentinas;

$C \backslash B$: o conjunto das mulheres no mundo que não residem no Brasil;

$B \backslash C$: o conjunto de residentes homens no Brasil.

Exercício 3

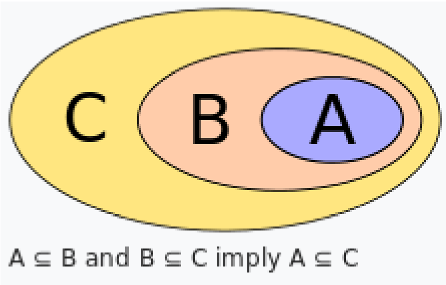
$$\begin{array}{cccc} \{\} & \{a\} & \{b\} & \{c\} \\ \{d\} & \{a,b\} & \{a,c\} & \{a,d\} \\ \{b,c\} & \{b,d\} & \{c,d\} & \{a,b,c\} \\ \{a,b,d\} & \{a,c,d\} & \{b,c,d\} & \{a,b,c,d\} \end{array}$$

Exercício 4

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

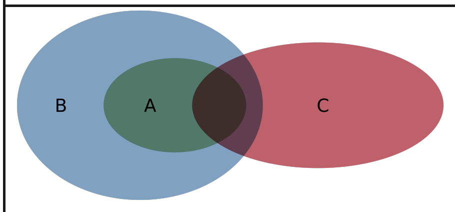
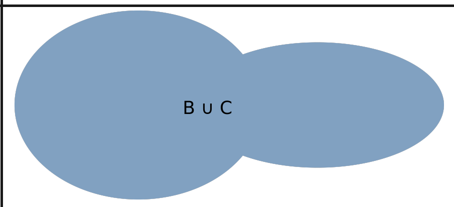
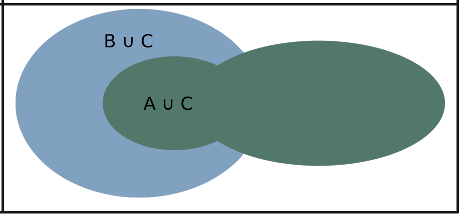
Exercício 5

A relação de contingência é transitiva. Então se A está contido em B, e B está contido em C, A está contido em C. Tal qual ilustra a seguinte imagem (em ordem reversa):



Exercício 6

Se A está contido em B, então a união de A com C está contida pela união de B com C. De fato, o seguinte diagrama de Venn demonstra esta proposição:

A, B, C	**B ∪ C**	**B ∪ C ⊆ A ∪ C**
		

Exercício 7

Um dado conjunto A é subconjunto de um conjunto B se A está **contido** em B, isto é, todos os elementos de A também são elementos de B. Os elementos de A e B podendo mesmo coincidir.

Segue desta definição de subconjunto que o conjunto vazio é contido por todos os conjuntos, pois todos os conjuntos existentes contém os elementos que compõem o conjunto vazio, isto é, nenhum (todos tem nada e mais algo). Ainda, mesmo o conjunto vazio contém todos os elementos que constituem... o conjunto vazio, e portanto também o contém.

Exercício 8

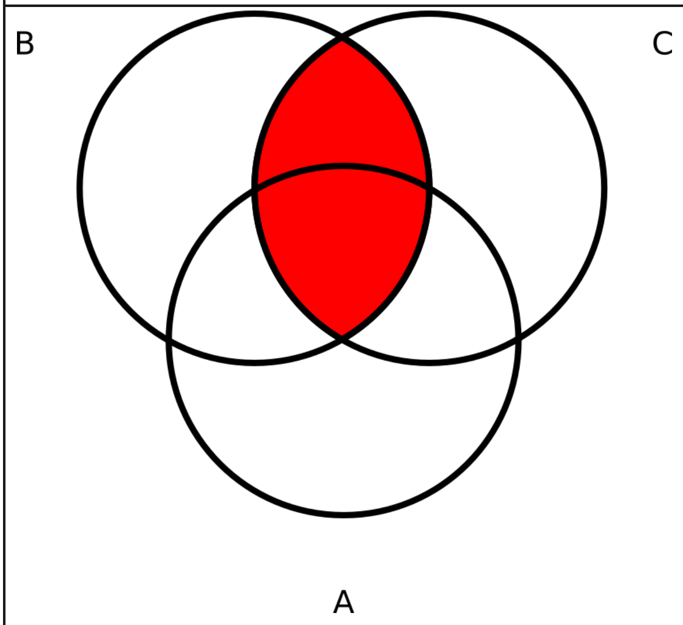
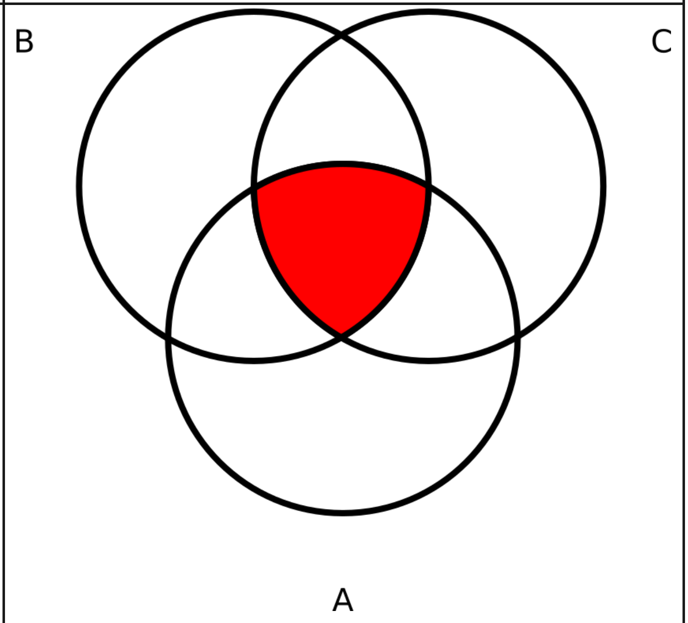
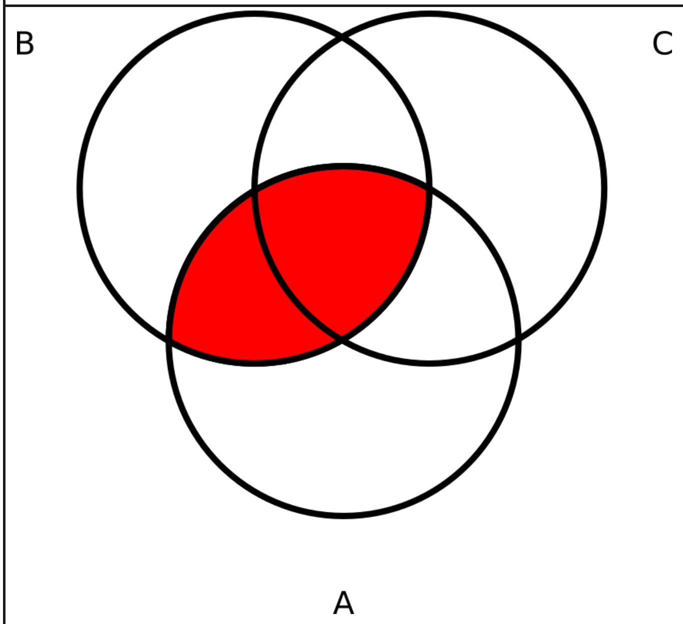
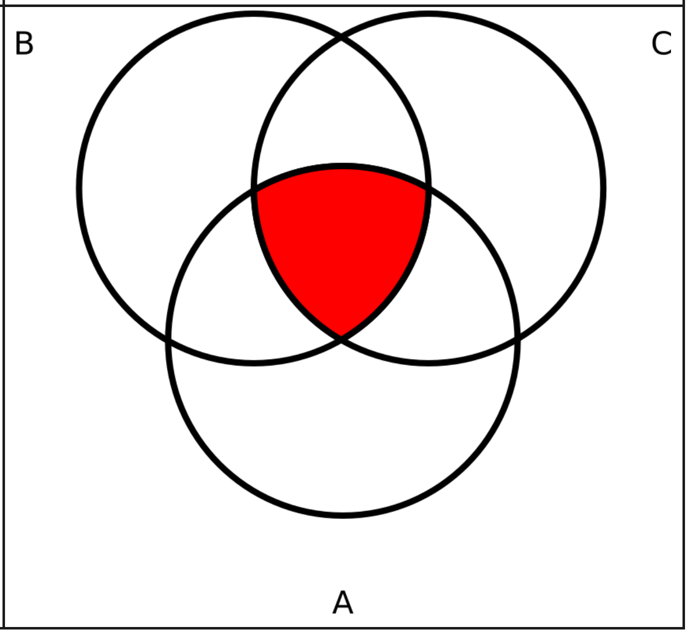
Uma vez que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$, temos:

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \underbrace{[(A \cap \overline{B}) \cup B] \cap [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}]}_{\text{Distributiva}}$$

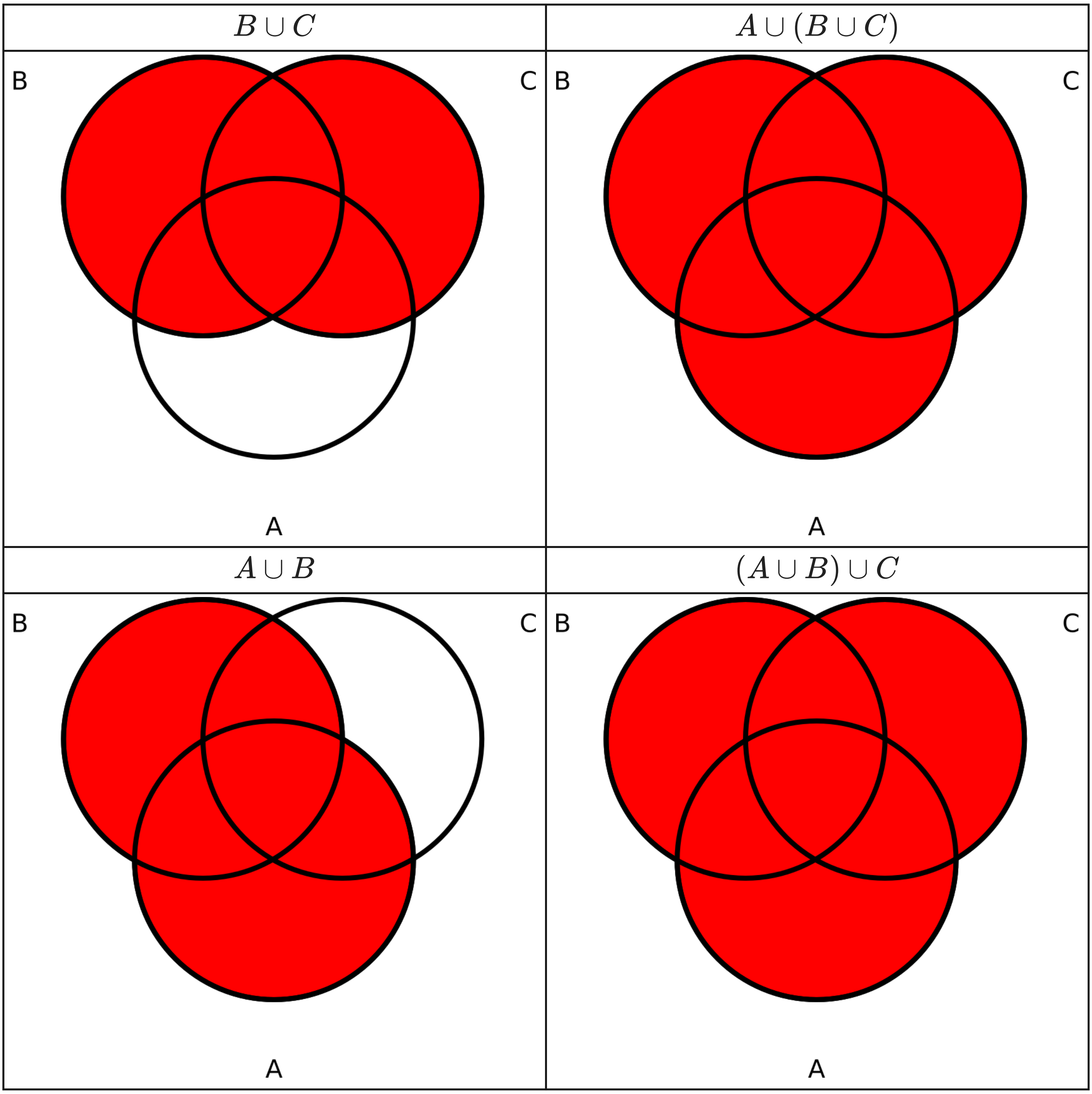
$$= [(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)] \cap [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] = [(A \cup B) \cap \Omega] \cap [\Omega \cap (\overline{B} \cup \overline{A})]$$
$$= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap \underbrace{(\overline{A \cap B})}_{\text{De Morgan}} = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \blacksquare$$

Exercício 9

Associatividade na intersecção

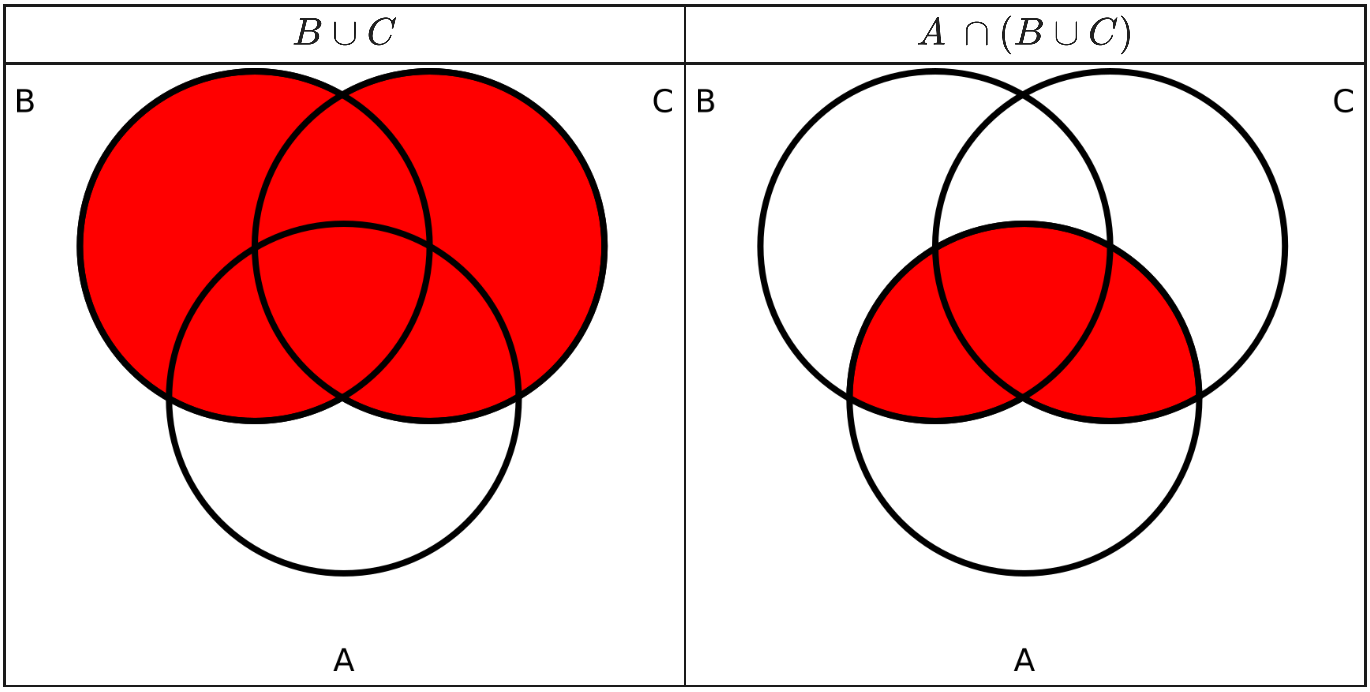
$B \cap C$	$A \cap (B \cap C)$
	
$A \cap B$	$(A \cap B) \cap C$
	

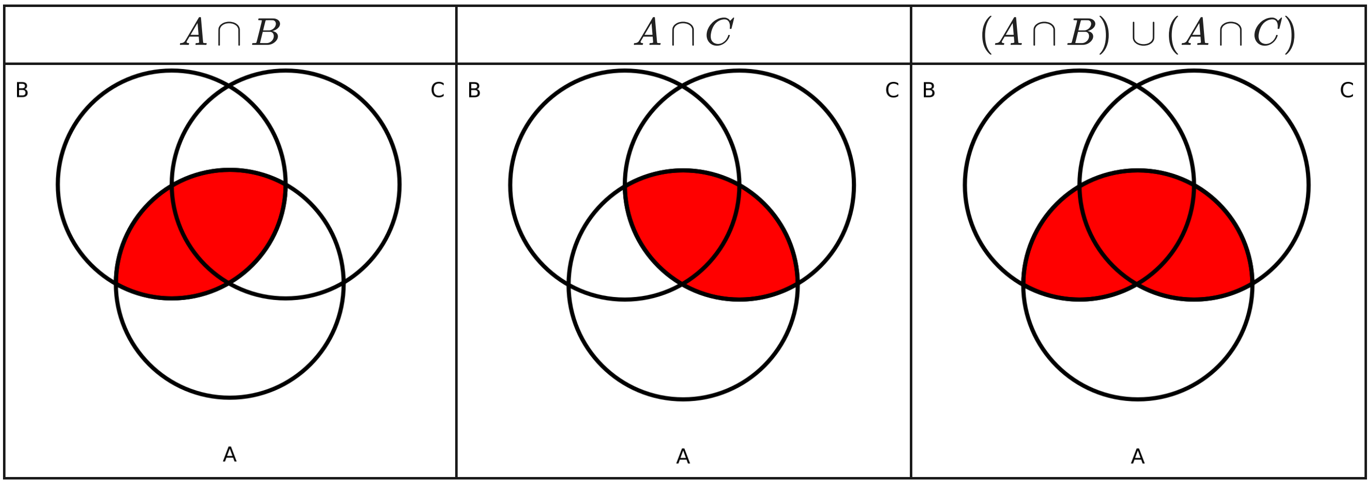
Associatividade na união

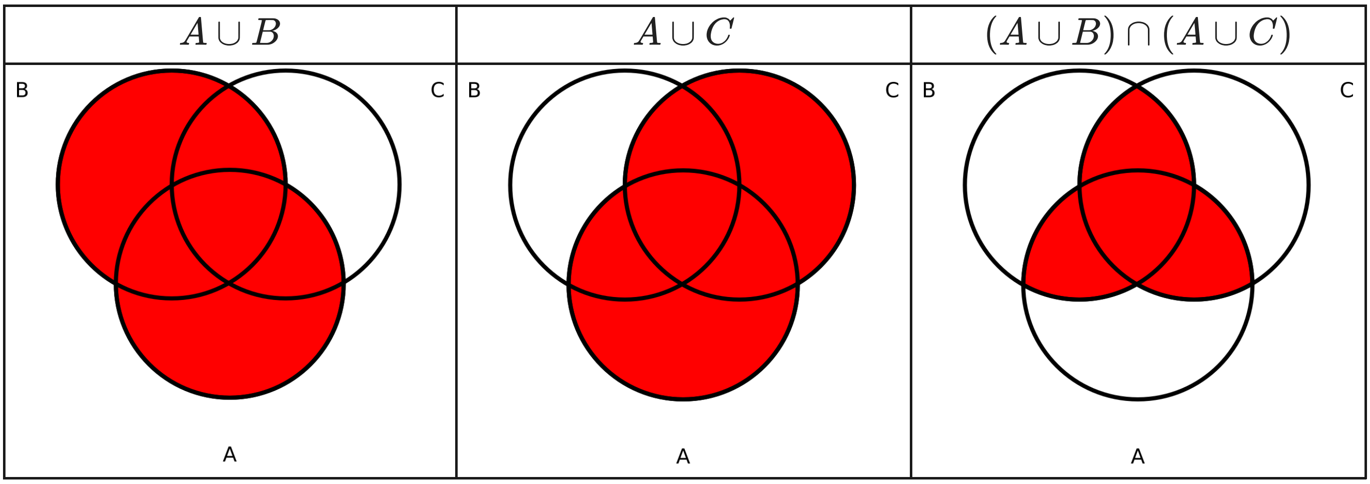


Exercício 10

Distributividade da intersecção na união

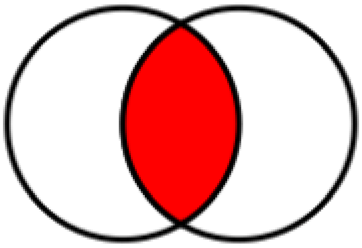
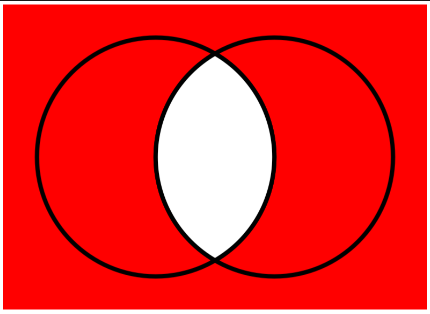


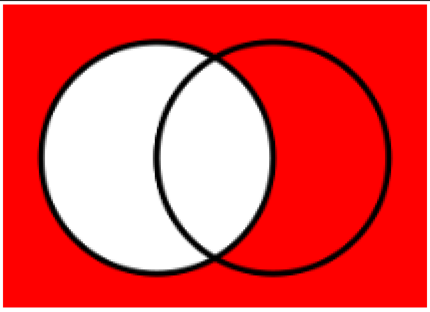
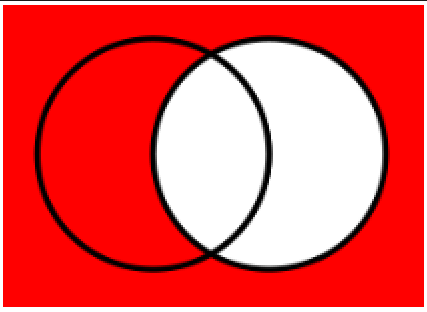
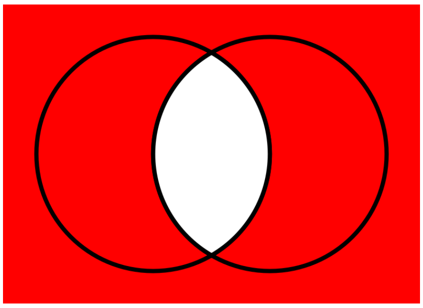




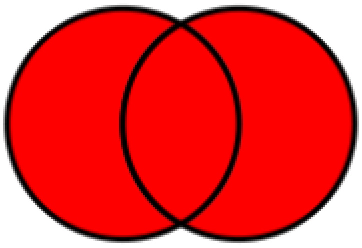
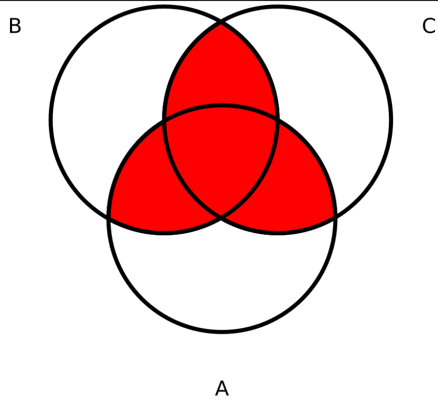
Exercício 11

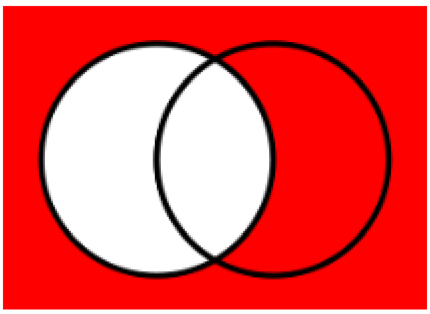
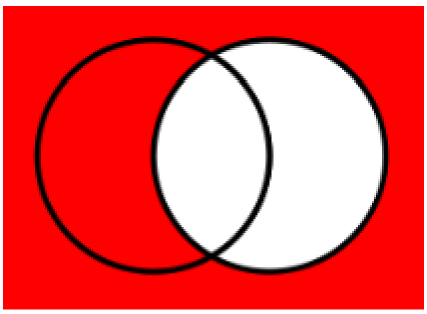
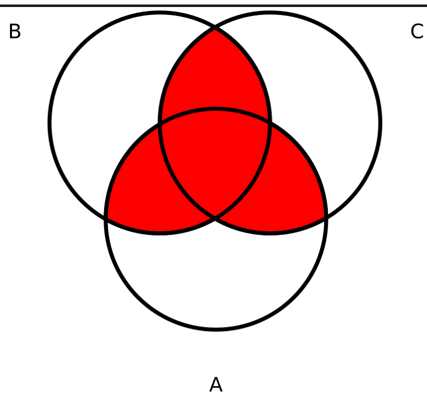
Complemento da intersecção

$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$
	

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
		

Complemento da união

$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$
	

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
		

Exercício 12

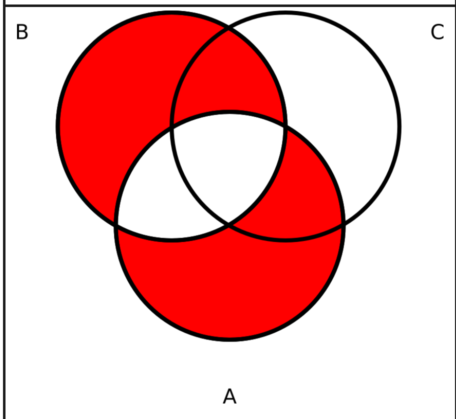
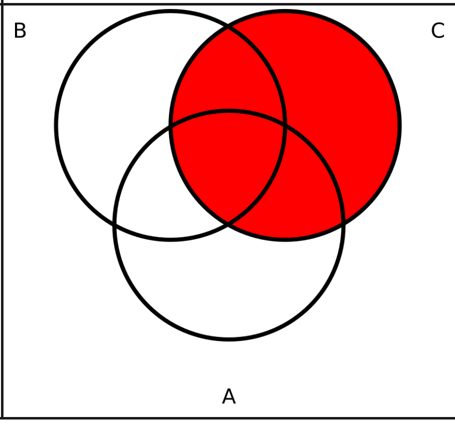
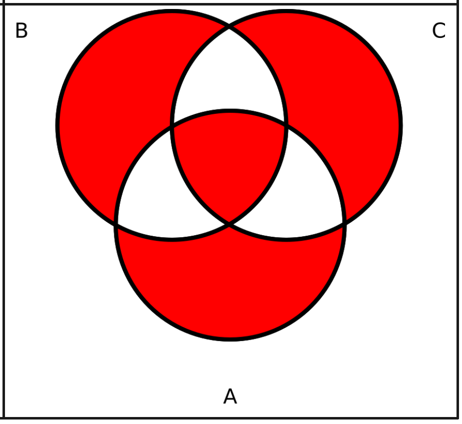
a. $A\Delta B = \{0,1,2,3,7,8,9\}$;

b. $B\Delta C = \{1,3,4,6,8\}$;

c. $B\Delta D = \{2,3,4,6,9\}$; $A\cap(B\Delta D) = \{2,3,4,6\}$

d. $A\cap B = \{4,5,6\}$; $A\cap D = \{2,3,5\}$; $(A\cap B)\Delta(A\cap D) = \{2,3,4,6\}$

Exercício 13

$A\Delta B$	C	$A\Delta B\Delta C$
		

Exercício 14

a. $A\oplus B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A) = (B\backslash A)\cup(A\backslash B) = B\oplus A$

b. $A\oplus B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A) = (\overline{B}\backslash\overline{A})\cup(\overline{A}\backslash\overline{B}) = (\overline{A}\backslash\overline{B})\cup(\overline{B}\backslash\overline{A}) = \overline{A}\oplus\overline{B}$

c. $A\oplus\varnothing = (A\backslash\varnothing)\cup(\varnothing\backslash A) = A\cup\varnothing = A$

d. $A\oplus A = (A\backslash A)\cup(A\backslash A) = \varnothing\cup\varnothing = \varnothing$

e. $A * A = A\cap A = A$

f. $A\oplus(B\oplus C) = A\oplus B\oplus C = (A\oplus B)\oplus C$

g. $A\oplus B = A\oplus C \implies (A\oplus B)\cap\overline{A} = (A\oplus C)\cap\overline{A} \implies (B\backslash A) = (C\backslash A)$

Pela definição de diferença, tem-se que $B\backslash A = \{x : (x\in B)\wedge(x\notin A)\}$, e $C\backslash A = x : (x\in C)\wedge(x\notin A)$. Ora, se $B\backslash A$ equivale a dizer que um elemento está em C mas não em A ($C\backslash A$), então $B = C$.

h. $A * (B \oplus C) = A \cap (B \oplus C) = \underbrace{(A \cap B) \oplus (A \cap C)}_{\text{Distributividade na intersecção}} = (A * B) \oplus (A * C)$

Propriedade esta da distributividade demonstrada no exercício 10.

Exercício 15

a. Cada subconjunto a integrar o produto fundamental pode assumir 2 formas distintas: A_i ou $\overline{A}_i$. Assim sendo, conforme a análise combinatória, para n subconjuntos existem $2_1 \times 2_2 \times \cdots \times 2_n = 2^n$ possibilidades distintas de produto fundamental.

b. Segue da formulação anterior que, para cada par J e K de produto fundamental existe pelo menos um conjunto $\overline{A}_i$ ($1 \leq i \leq n$) em J que é complementar ao conjunto A_i em K. Isto é, dado um elemento x qualquer tem-se:

$$\{x : (x \in A_i) \veebar (x \in \overline{A}_i)\}$$

Onde $\veebar$ é o "ou exclusivo". Como $J = \{x : x \in (A_1 \cap \cdots \cap A_i \cap \cdots \cap A_n)\}$, $K = \{x : x \in (A_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_i \cap \cdots \cap A_n)\}$ e a definição de intersecção para quaisquer conjuntos A e B é $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$, não à elemento em J que também pertença à K. Estes conjuntos são, portanto, **disjuntos** entre si.

c. O conjunto Universo Ω é aquele que engloba a todos os elementos que pertencem à qualquer conjunto. Consideremos o par de conjuntos J e K anterior. Um elemento x que pertence a J não pertence a K e vice-versa, não obstante este pertence a algum conjunto e portanto pertence também ao conjunto Universo. Pela definição de produto fundamental, podemos extrapolar essa relação para qualquer número n de conjuntos de produto fundamental. Assim, qualquer elemento x é tal que pertence a um produto fundamental, não pertence aos $(n-1)$ demais, e pertence ao conjunto Universo.

Como todos os elementos x são assim compreendidos pelo conjunto Universo, pela definição de subconjunto dada no exercício 6, todo produto fundamental é subconjunto do conjunto Universo e, por conseguinte, o conjunto Universo unifica todos os produtos fundamentais.

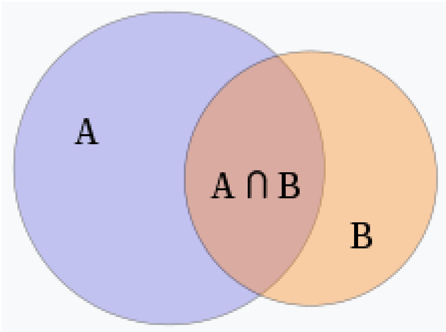
Exercício 16

Um subconjunto X de S é tal que possui i elementos, $0 \leq i \leq n$, deste último. Ou seja, para cada elemento de S existem 2 possibilidades: estar ou não em X. Assim sendo, conforme a análise combinatória, para n elementos existem $2_1 \times 2_2 \times \cdots \times 2_n = 2^n$ possíveis subconjuntos.

Tal qual fizemos no exercício 4, podemos quantificar o número de subconjuntos a conter m elementos pela seguinte relação binominal:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Exercício 17



A relação dada pelo enunciado trata-se do *Princípio de Inclusão e Exclusão*.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

De fato, ao contarmos o número de elementos em $|A \cup B|$ pela soma dos elementos em $|A| + |B|$, necessitamos também subtrair o número de elementos em $|A \cap B|$ de forma a evitar que estes sejam contabilizados duas vezes.

Exercício 18

Uma forma mais geral do Princípio de Inclusão Exclusão pode ser expressa como:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |A_i \cap A_j| + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Assim, temos que

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Enquanto

$$|A \cup B \cup C \cup D| = (|A| + |B| + |C| + |D|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| \\ + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) - |A \cap B \cap C \cap D|$$

Exercício 19

Para qualquer elemento x, se x está contido em A este

- está contido em um subconjunto de $P(A)$
- não está contido em B ou um subconjunto de $P(B)$

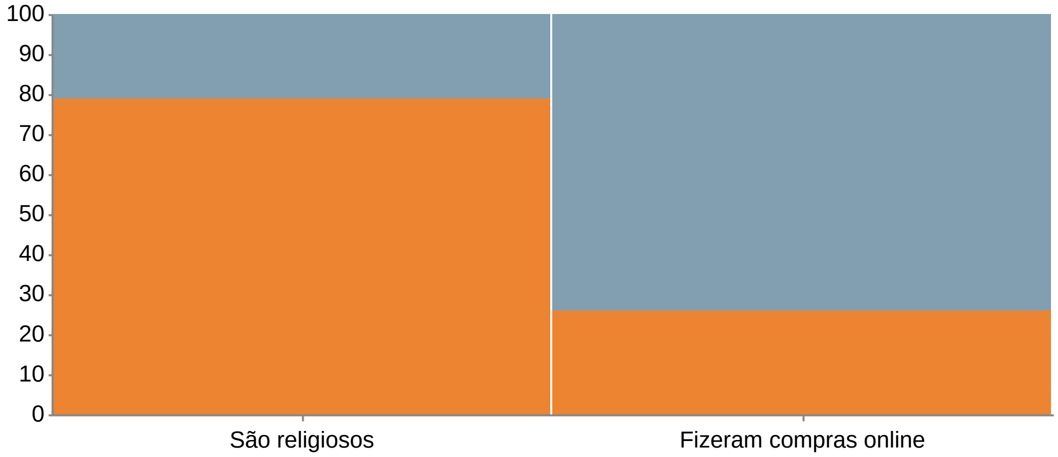
e vice-versa. Isso pois A e B tratam-se de conjuntos **disjuntos**. Assim sendo,

- $P(A) \cap P(B) = A \cap B = \varnothing$

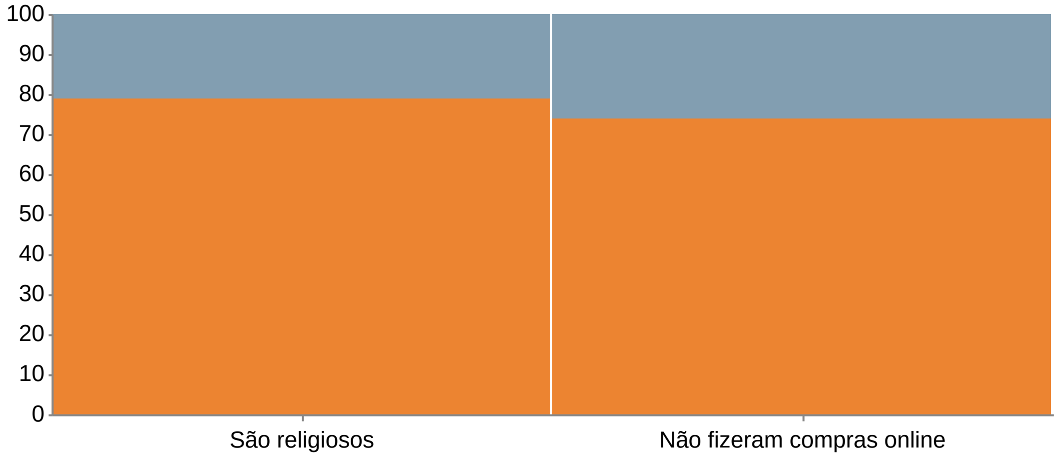
- $P(A) \cup P(B) \subseteq A \cup B$

Exercício 20

Observe o seguinte gráfico:



Se admitirmos que o maior número possível de pessoas não religiosas e que nunca fizeram uma compra online, temos que no mínimo o número de pessoas religiosas que nunca fizeram compras é $[100 - (26 + 21)]\% = 53\%$ da população. Por outro lado,



Se admitirmos que a correspondência entre pessoas religiosas e que não fizeram compras online é máxima, teremos que todos que não fizeram compras online, 74% da população, são religiosos.

Por isso esse índice nunca é igual ou inferior à 50% da população.

Exercício 21

Todos aqueles múltiplos de $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 5 = 10$, descontados aqueles múltiplos de $2 \times 3 \times 5 = 30$. Ou seja, o quociente de $100/6$ mais o quociente de $100/10$ menos o quociente de $100/30$, o que resulta em $16 + 10 - 3 = 23$.

---

1. nUSP: 12543033; Turma 04 ↩