Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2021
Professor: José Ricardo G. Mendonça

4ª Lista de Exercícios – Relações e funções – 15 out. 2021

Histories make men wise; poets witty; the mathematics subtile; natural philosophy deep; moral grave; logic and rhetoric able to contend. Abeunt studia in mores.[a]
Francis Bacon (1561–1626), in *Essays*, "L. Of Studies" (1597)

I. Relações

1. Um par ordenado de elementos a e b quaisquer, denotado por (a,b), pode ser definido em termos de conjuntos como $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$. Usando essa definição, mostre que $(a,b) = (c,d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$. Essa é a propriedade crucial dos pares ordenados que os tornam realmente úteis. Dicas: (i) considere os casos em que $a = b$ e $a \neq b$ separadamente; (ii) pode-se demonstrar a proposição por redução ao absurdo.

2. Seja $R = \{(1,b),(1,c),(3,b),(4,a),(4,c)\}$ uma relação de $A = \{1,2,3,4\}$ para $B = \{a,b,c\}$. Determine:

   (a) O diagrama de setas para R e o domínio e a imagem de R;

   (b) A matriz que representa R;

   (c) A relação inversa R^{-1} e a matriz que representa R^{-1};

   (d) Que relação existe entre as matrizes que representam R e R^{-1}?

3. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$ e $C = \{x,y,z\}$ e as relações $R = \{(1,b),(2,a),(2,c)\}$ de A para B e $S = \{(a,y),(b,x),(c,y),(c,z)\}$ de B para C.

   (a) Encontre a relação composta $T = R \circ S$;

   (b) Encontre as matrizes M_R e M_S que representam R e S, respectivamente;

   (c) Determine e compare a matriz M_T que representa a relação T encontrada no item (a) com o produto $M_R M_S$ das matrizes encontradas no item (b).

[a] A frase em latim *abeunt studia in mores* vem de Ovídio, *Epistulae Heroidum* (*ca.* 16 BCE), Livro 15, e significa "o estudo passa para o caráter", ou ainda, coloquialmente, "a prática determinada se torna hábito".

4. Sejam R e S duas relações sobre o conjunto $A = \{1,2,3\}$ dadas por $R = \{(1,1),(1,2),$ $(2,3),\ (3,1),(3,3)\}$ e $S = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,3)\}$. Desenhe os grafos orientados para R e S e para as relações compostas $S \circ R,\ R \circ S,\ R^2 = R \circ R$ e $S^2 = S \circ S$.

5. Seja $R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(c,d)\}$ uma relação sobre um conjunto A. Determine $R \circ R$ e R^{-1}, desenhe seus respectivos grafos orientados e discuta se as relações R, $R \circ R$ e R^{-1} são funções.

6. Seja $R = \{(a,c),(c,e),(d,b),(d,d),(e,b),(e,e)\}$ uma relação sobre um conjunto A. Desenhe os grafos orientados que representam as relações R, R^{-1}, $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$.

7. Sejam R e S ordens parciais sobre um conjunto A. Mostre que $R \cap S$ também é uma relação de ordem parcial sobre A.

8. Seja R uma relação sobre $\mathbb{Z}$ tal que aRb se $b = a^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Mostre que R é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{Z}$.

9. Um conjunto S junto de uma relação de ordem parcial R sobre S constitui um ***poset*** (do inglês "partially ordered set"), e o digrafo de R ignorando todos os laços oriundos da reflexividade e todas as arestas oriundas da transitividade é conhecido como ***diagrama de Hasse***. Mostre que a relação $R = \{(A,B) \colon A \subseteq B\}$ definida sobre uma coleção qualquer de conjuntos S é uma ordem parcial e desenhe seu diagrama de Hasse para $S = \mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

10. Mostre que a relação $R = \{((p,q),(r,s)) \colon ps = qr\}$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) é uma relação de equivalência. Qual é a equivalência mais óbvia descrita por R?

11. Seja R uma relação sobre $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ dada por ARB se e somente se a diferença simétrica $A \triangle B$ é finita, onde $A, B \subseteq \mathbb{Z}$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

12. Mostre que o conjunto dos pares ordenados $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que possuem a mesma parte fracionária, isto é, para os quais $(b-a) \in \mathbb{Z}$,[b] forma uma relação de equivalência e exiba suas classes de equivalência.

13. Seja R uma relação reflexiva e transitiva sobre um conjunto A. Mostre que $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência sobre A.

14. Seja $m > 1$ um número inteiro e $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é congruente a b módulo m, e denotamos essa relação por $a \equiv b \pmod{m}$, se $m \mid (a-b)$, isto é, se $a - b = km$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Por exemplo, $18 \equiv 3 \pmod{5}$ e $-2 \equiv 14 \pmod{8}$. Mostre que a relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência.

---

[b] A notação normalmente empregada para a parte fracionária de um número real a é $\{a\}$, enquanto sua parte inteira é denotada por $[a]$. Assim, podemos escrever $a = [a] + \{a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$; por exemplo, $\pi = [\pi] + \{\pi\} = 3 + 0.1415926\ldots$. Podemos também denotar a parte fracionária de um número qualquer a pela expressão a mod 1.

15. Duas matrizes A e B de mesma ordem são ***similares*** se existe uma matriz invertível P tal que $PAP^{-1} = B$. Mostre que a relação de similaridade é uma relação de equivalência.

II. Funções

1. Determine se cada uma das funções $f\colon X \to Y$ a seguir está bem definida e caso não esteja discuta porque:

   (a) $X = \{\text{todas as mulheres}\}$, $Y = \{\text{todos os homens}\}$, $f(x) = \text{marido de } x$;

   (b) $X = Y = \mathbb{N}$, $f(x) = x - 1$;

2. Mostre que se $f\colon X \to Y$ é injetora, então $f^{-1}\colon Y \to X$ é injetora e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

3. Mostre que se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são sobrejetoras, então $g \circ f\colon X \to Z$ é sobrejetora.

4. Se $f\colon X \to Y$ é sobrejetora e $g, h\colon Y \to Z$ são tais que $g \circ f = h \circ f$, mostre que $g = h$.

5. Em que condições um grafo orientado representa uma função?

6. Seja $f\colon \mathbb{Z} \to \{-1, +1\}$ tal que $f(z) = -1$ se z é ímpar e $f(z) = +1$ se z é par.

   (a) Verifique se f é uma função bem definida e caso seja dê uma expressão para ela;

   (b) Mostre que $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$;

   (c) Verifique se $f(z_1 z_2) = f(z_1)f(z_2)$;

   (d) Exiba uma função ou família de funções para a qual a propriedade do item (c) valha.

7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_{a,b}(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{p,q}$ e exiba p e q em termos de a, b, c e d.

   (b) Verifique em que condições $f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{a,b} \circ f_{c,d}$;

   (c) Encontre todos os $f_{a,b}$ tais que $f_{a,b} \circ f_{1,1} = f_{1,1} \circ f_{a,b}$;

   (d) Mostre que $f_{a,b}^{-1}$ existe e exiba sua forma.

8. Seja $A\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função definida recursivamente pelas relações

   (i) $A(0, n) = n + 1$ para todo $n \geqslant 0$;

   (ii) $A(m, 0) = A(m - 1, 1)$ para todo $m \geqslant 1$;

   (iii) $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$ para todo $m, n \geqslant 1$.

Calcule $A(1,1)$ e $A(1,2)$ manualmente e escreva um programa para calcular $A(m,n)$ em geral e use-o para calcular $A(2,2)$, $A(3,2)$ e $A(4,2)$.

A função de Ackermann $A(m,n)$ fornece um dos primeiros exemplos conhecidos de função computável que não é primitiva recursiva.[c] Uma função primitiva recursiva é, grosso modo, uma função total[d] que pode ser calculada por um programa de computador usando somente laços **for** (ou, equivalentemente, laços **while**) para os quais uma estimativa do número de iterações pode ser determinada antes do laço começar. Essa classe de funções é muito importante em teoria da computação, já que só é computável aquilo que pode ser tratado por um algoritmo, que por definição tem início, meio e, principalmente, fim! Se não pudermos estimar de antemão o número de interações necessárias para computar algo, pode ser que estejamos diante de um problema não-computável. Todas as funções recursivas primitivas são computáveis, mas a função de Ackermann nos mostra que nem todas as funções computáveis são primitivas recursivas.[e]

III. ***Divertissement*: O argumento diagonal de Cantor**

Em nosso curso estudamos duas técnicas básicas de demonstração em matemática discreta de enorme utilidade e consequências: o princípio da indução matemática (ou da indução finita) e o princípio da ocupação finita (ou "princípio do pombal").[f] Uma terceira técnica fundamental é o ***princípio da diagonalização*** ou ***argumento diagonal***, introduzido por Georg F. L. P. Cantor (1845–1918) em 1891 para demonstrar que existem conjuntos infinitos não-enumeráveis (ou incontáveis), isto é, conjuntos com uma quantidade de elementos tão grande que não pode ser contada pelos números naturais—como, por exemplo, os números reais.[g] Em particular, Cantor demonstrou que qualquer conjunto sempre pode ser "suplantado" por outro de cardinalidade maior, dando início ao estudo dos ***números transfinitos***.[h]

---

[c] W. Ackermann, "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen", *Mathematische Annalen* **99** (1), 118–133 (1928). Um exemplo equivalente havia sido dado pouco antes por G. Sudan, "Sur le nombre transfini ω^{ω}", *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences* **30**(1), 11–30 (1927); veja C. Calude, S. Marcus, I. Tevy, "The first example of a recursive function which is not primitive recursive", *Historia Mathematica* **6** (4), 380–384 (1979).

[d] Uma ***função total*** nada mais é que uma relação $f \subseteq X \times Y$ para a qual $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(f(x) = y)$.

[e] O aluno pode querer assistir ao vídeo "The most difficult program to compute?" no canal Computerphile do YouTube (acessado em 15 out. 2021). Veja também M. Hils e F. Loeser, *A First Journey through Logic*, Student Mathematical Library Volume 89 (Providence: AMS, 20019), Capítulo 4.

[f] Em inglês, o princípio da ocupação finita é conhecido como *pigeonhole principle*, algumas vezes traduzido para o português como "princípio da casa dos pombos". Outra denominação deste princípio é "princípio das gavetas".

[g] G. Cantor, "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890–91* **1**, 75–78 (1892).

[h] G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trad. P. E. B. Jourdain (New York: Dover, 1915) — tradução para o inglês dos dois principais artigos de Cantor sobre números transfinitos.

Embora o argumento diagonal não seja tão usado quanto as outras duas técnicas mencionadas anteriormente, ele é uma das mais poderosas ferramentas da matemática e é útil na demonstração de muitos resultados em teoria da computação. Por exemplo, a demonstração de Cantor de que $|S| < |\mathscr{P}(S)|$ para todo conjunto S, onde $\mathscr{P}(S)$ é o conjunto potência de S, leva à conclusão de que existem mais problemas a serem resolvidos do que podem existir algoritmos para resolvê-los! É aqui que os fundamentos da matemática se encontraram com a teoria da computação através das ideias de Alonzo Church (1903–1995), com a introdução do ***λ-cálculo***,[(i)] e Alan M. Turing (1912–1954), com a introdução das ***máquinas de Turing***, e a solução para o famoso ***Entscheidungsproblem***, ou "problema da decisão".

O argumento diagonal pode ser descrito da seguinte forma: seja R uma relação binária sobre um conjunto A, e seja $D = \{a\colon a \in A, (a,a) \notin R\}$ o "conjunto diagonal" para R. Para cada $a \in A$, seja $R_a = \{b\colon b \in A, (a,b) \in R\}$. Então $D \neq R_a$ para todo $a \in A$. Demonstrações usando o argumento diagonal em geral são por contradição. Suponha que queremos mostrar que $|A| \neq |B|$ para dois conjuntos A e B quaisquer. Quando A e B são finitos, em geral a demonstração segue de argumentos combinatoriais e probabilísticos. Quando A e B são infinitos, a estratégia consiste em supor inicialmente que existe uma aplicação sobrejetora $f\colon A \to B$ e mostrar que existe um $b \in B$ tal que não existe nenhum $a \in A$ para o qual $f(a) = b$, contrariando a hipótese de que f é sobrejetora. Essa contradição leva necessariamente à conclusão de que $|A| \neq |B|$. No argumento diagonal, construímos o elemento $b \in B$ a partir de "pedaços" retirados de cada $a \in A$ de forma que cada pedaço de b difira do respectivo pedaço de a e a partir deles concluímos que $f(a) \neq b$ para todo $a \in A$. O conjunto de todos os b construídos dessa forma é o "conjunto diagonal" D. A parte engenhosa do argumento diagonal consiste em escolher os pedaços a serem usados na construção do conjunto diagonal. Vamos ilustrar a aplicação do argumento diagonal na demonstração de um resultado originalmente devido a Cantor:

Teorema [Cantor, 1891]. O conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ é incontável.

Demonstração. Vamos supor que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ seja contável, isto é, que podemos enumerar todos os seus elementos como $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$. Considere agora o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}\colon n \notin S_n\}$. D é um conjunto de números naturais, de forma que, pela nossa hipótese, D deve aparecer na enumeração $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$, isto é, $D = S_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mas isso é impossível, pois se $k \in S_k$, então $k \notin D$, de forma que neste caso $D \neq S_k$, e se $k \notin S_k$, então $k \in D$, e novamente concluímos que $D \neq S_k$. Assim, nunca pode ser que $D = S_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Isso significa que a hipótese inicial de que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ é contável é falsa, pois leva a contradições, de forma que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ deve ser incontável. □

[(i)] O λ-cálculo oferece um formalismo que permite definir e operar funções e constitui o fundamento matemático de várias linguagens de programação baseadas em funções recursivas (chamadas ***linguagens funcionais***). Uma das primeiras linguagens de programação especificadas, o Lisp, que goza de grande prestígio na área de inteligência artificial, foi concebida como uma implementação do λ-cálculo. O editor de textos *emacs*, muito usado em sistemas do tipo Unix (como o Mac OS e o Linux), é escrito em parte em um dialeto Lisp.

O *teorema de Cantor* afirma que $|S| < |\mathscr{P}(S)|$ para qualquer conjunto S (no teorema acima, $S = \mathbb{N}$), resultado que levou Cantor a concluir que $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ e a introduzir os *números cardinais transfinitos* $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ (lê-se "álefe zero", da primeira letra maiúscula do alfabeto hebraico) e $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ (a letra latina c minúscula gótica) e estabelecer o conceito de que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.[j] Cantor acreditava que não existia nenhum conjunto S para o qual $\aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}$, crença que ficou conhecida como ***hipótese do contínuo***, porque os números reais $\mathbb{R}$ são também conhecidos como "o contínuo".[k] Em 1963, o matemático norte-americano Paul Joseph Cohen (1934–2007) mostrou que a validade da hipótese do contínuo não pode ser decidida![l] Pelo seu trabalho sobre a hipótese do contínuo Paul J. Cohen ganhou a medalha Fields em 1966, a única concedida na área de lógica matemática até hoje. O impacto das idéias de Cohen na lógica matemática e na teoria dos conjuntos, bem como na filosofia da matemática, é inestimável.[m]

Exercício. Mostre que o conjunto de todos os números reais no intervalo $[0,1]$ é incontável. Para isso, repare que todo $x \in [0,1]$ pode ser escrito como uma sequência binária infinita (como, por exemplo, $0.1001010001101000110\cdots$), assuma que existe uma enumeração dessas sequências pelos números inteiros $\mathbb{N}$ e aplique o argumento diagonal ao conjunto formado pelas sequências obtidas a partir da inversão ($0 \leftrightarrow 1$) do n-ésimo dígito de cada n-ésima sequência.

O aluno interessado nos aspectos matemáticos, lógicos, filosóficos, semânticos e computacionais do argumento diagonal de Cantor pode consultar o livro de Keith Simmons, *Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993). Uma apresentação acessível do argumento diagonal de Cantor, do *Entscheidungsproblem* e da tese de Church-Turing aparece em Martin Davis, *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*, 3a. ed. (Boca Raton: CRC, 2018). Um vídeo divertido e ao mesmo tempo rigoroso do Michael Stevens (Vsauce) sobre o argumento diagonal de Cantor e os diversos tipos de infinito pode pode ser visto em "How to count past infinity" (acessado em 15 out. 2021).

---

[j] Na verdade, pode-se mostrar que $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ usando o mesmo argumento diagonal de Cantor: basta construir uma bijeção $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, ou seja, uma representação binária infinita para todo número real.

[k] Repare que $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ para todo n finito. A curva de Peano (um caso particular de uma curva fractal) fornece um exemplo concreto de bijeção contínua (porém não diferenciável) entre todos os pontos do intervalo $[0,1]$ e todos os pontos da região $[0,1]^2$. Já o conjunto das aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é muito maior, $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = 2^{\mathfrak{c}}$, também denominado $\beth_2$ (lê-se "bet dois", onde $\beth$ é a segunda letra maiúscula do alfabeto hebraico). Nessa notação $\aleph_0 = \beth_0$, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \beth_1$ e, de forma mais geral, $2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$.

[l] P. J. Cohen, "The independence of the continuum hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **50** (6), 1143–1148 (1963) e "The independence of the continuum hypothesis, II", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **51** (1), 105–110 (1964). Veja também P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Mineola, NY: Dover, 2008).

[m] Uma descrição mais ou menos acessível do trabalho de P. J. Cohen em lógica matemática e teoria dos conjuntos é dada por A. Kanamori, "Cohen and set theory", *The Bulletin of Symbolic Logic* **14** (3), 351–378 (2008).