Resolução da Lista 4 da disciplina de Matemática Discreta

Feita por Guilherme de Abreu Barreto[1]

Relações

Exercício 1

Se concordarmos que a Teoria dos Conjuntos provêm uma sólida fundamentação axiomática a partir da qual construirmos demais saberes matemáticos, então temos de demonstrar como demais objetos matemáticos podem ser descritos enquanto conjuntos de algum tipo. Ou seja, se **pares ordenados** não forem compreendidos enquanto axiomas, então estes podem ser descritos enquanto conjuntos. O principal problema o qual temos de sanar nesta representação é o fato de que conjuntos descrevem qualquer agrupamento de elementos distintos, mesmo aqueles **desordenados**; tal que um conjunto$A = \{a, b\} = \{b, a\}$.

Para sanar essa insuficiência, o matemático Kazimierz Kuratowski propôs em 1921 a seguinte definição:

- Considere um conjunto com dois valores a, b:

$$A = \{a, b\}$$

- Então, o conjunto potência de A é:

$$P(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

- Se deste conjunto derivarmos um subconjunto contendo todos os elementos que por vez contêm a, teremos:

$$S(P(A)) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Note que este subconjunto contém toda informação necessária para descrevermos um par ordenado:

- Os valores a e b.

- A ordenação destes: o primeiro elemento é descrito pelo elemento $\{a\}$

Finalmente, podemos então restituir a notação original estabelecendo a correspondência $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Voltemos ao problema em questão. (a, b) = (c, d) se e somente se $a = c$ e $b = d$. Procederemos na ida por demonstração direta:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} := (c, d)$$

E na volta procederemos por contradição. Por hipótese, a = c e b = d, onde $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Vamos assumir aqui que também a = b = c = d. Pela definição de conjuntos, os elementos que constituem um conjunto são todos **distintos entre si**, de tal forma que repetições são redundantes, não constituem novos elementos. Assim:

$$(a, a) := \{\{a\}, \{\underbrace{a, a}_{=a}\}\} = \{\underbrace{\{a\}, \{a\}}_{=\{a\}}\} = \{\{a\}\}$$

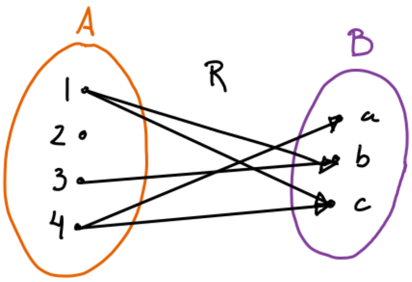
Podemos notar que a cardinalidade deste conjunto é distinta daquela da hipótese:

$|\{\{a\}\}| = 1;$
$|\{\{a\}, \{a, b\}\}| = 2$

O que é absurdo. Logo, só é possível que $(a, b) = (c, d)$ se $a = b$ e $c = d$, e não doutra forma. ■

Exercício 2

a.



b.

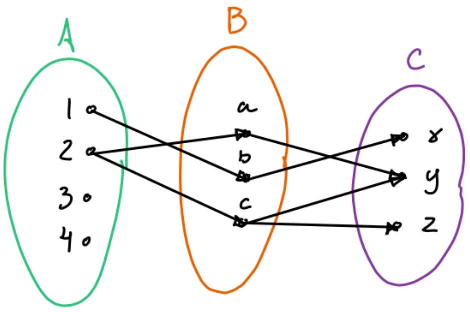
R	**a**	**b**	**c**
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0
4	1	0	1

c. $R^{-1} = \{(b, 1), (c, 1), (b, 3), (a, 4), (c, 4)\}$

R^{-1}	**1**	**2**	**3**	**4**
a	0	0	0	1
b	1	0	1	0
c	1	0	0	1

d. Uma é a matriz transposta da outra. Isso é uma se obtêm pela transposição dos elementos ordenados em linhas na outra para colunas na própria.

Exercício 3



a. $T = R \circ S = \{(1, x), (2, y), (2, z)\}$

b. $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. Estas são ligeiramente diferentes:

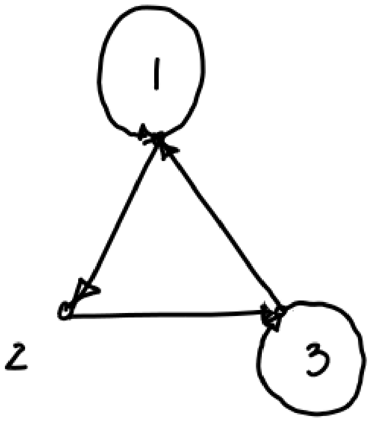
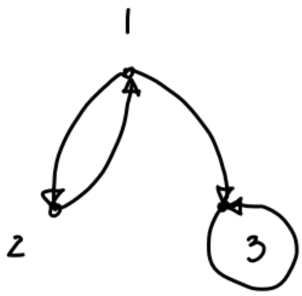
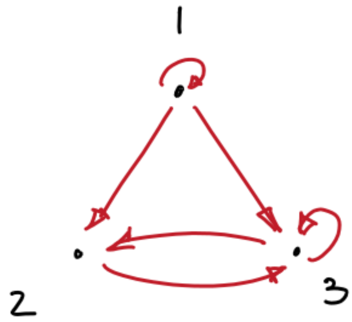
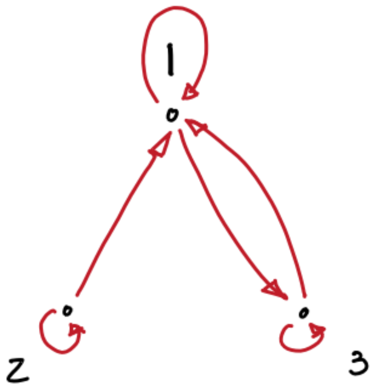
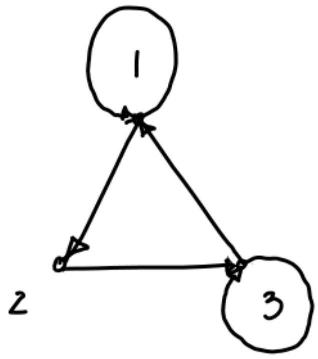
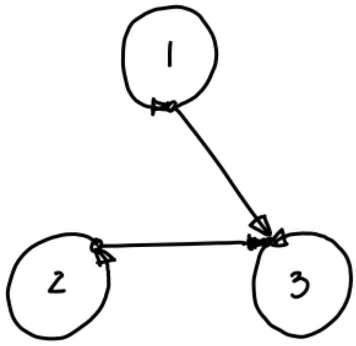
$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

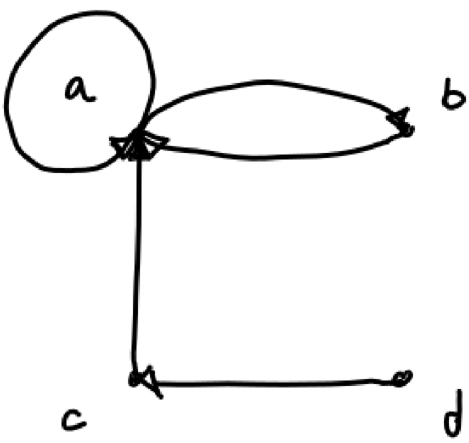
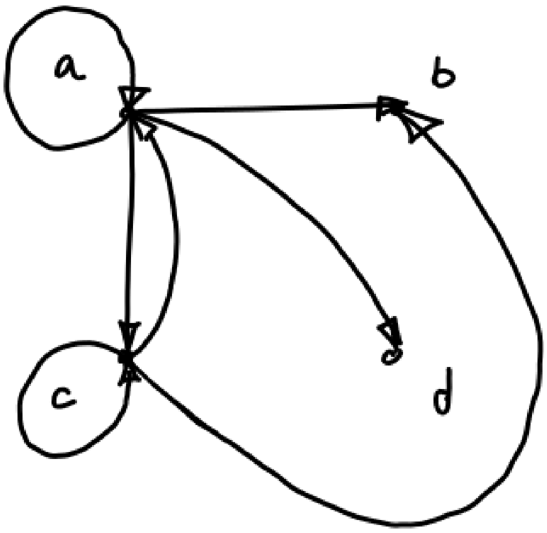
Note que a matriz resultante $M_R M_S$ corresponde às posições de incidência das setas em C e também o número destas:

T = R ○ S	**x**	**y**	**z**
1	1	0	0
2	0	2	1
3	0	0	0
4	0	0	0

Exercício 4

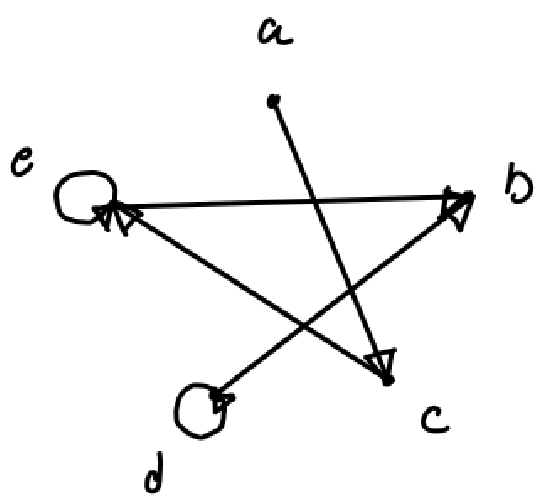
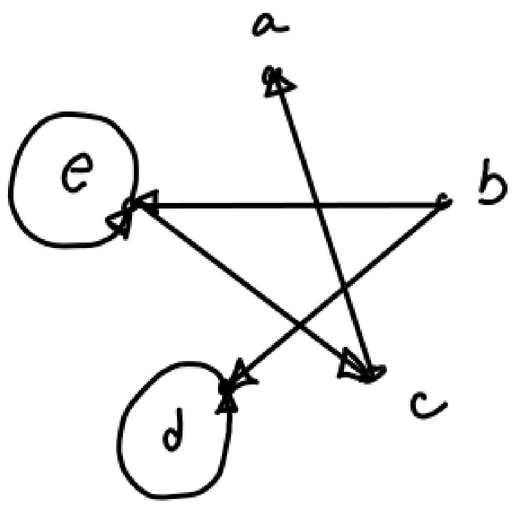
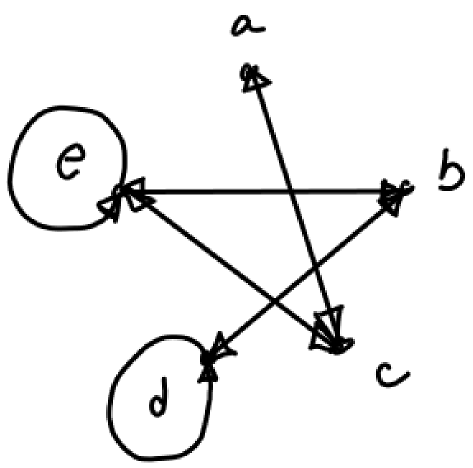
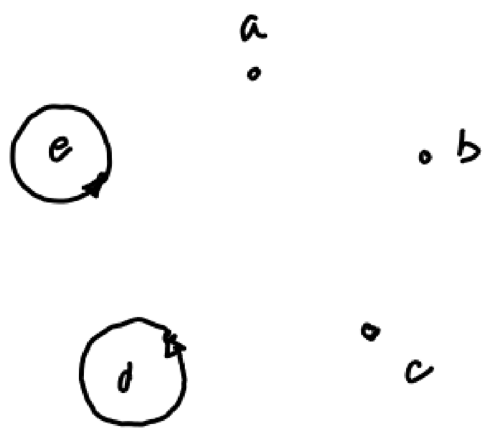
R	**S**	**R ○ S**
		
S ○ R	**R^2**	**S^2**
		

Exercício 5

R^{-1}	**R^2**
	

Nota-se que as relações R, R^{-1} e R^2 **não** são funções pois mapeiam pelo menos um valor no domínio para mais de um valor na imagem.

Exercício 6

R	**R^{-1}**
	
$R \cup R^{-1}$	**$R \cap R^{-1}$**
	

Exercício 7

Sejam R e S ordens parciais sobre um conjunto A. Mostre que R∩S também é uma relação de ordem parcial sobre A.

Para uma relação ser de tipo ordem parcial, esta necessita ser **reflexiva**, **antissimétrica** e **transitiva**. A relação de intersecção $R \cap S$ é deste tipo por consequência de carregar tais características dos conjuntos que integra:

- Esta é reflexiva pois qualquer par ordenado $(a, a) \in R$ corresponde s $(a, a) \in S$ e portanto a $(a, a) \in R \cap S$.
- Para qualquer par ordenado $(a, b) \in R \cap S$, $(a, b) \in R$ e $(a, b) \in S$. Como tanto R e S são antissimétricos, $(b, a) \notin R$, $(b, a) \notin S$ e $(b, a) \notin R \cap S$.
- Para qualquer par ordenado $(a, b), (b, c) \in R \cap S$, $(a, b), (b, c) \in R$ e $(a, b), (b, c) \in S$. Como tanto R e S são transitivos, $(a, c) \in R$, $(a, c) \in S$ e $(a, c) \in R \cap S$.

Exercício 8

Tal relação é:

- Reflexiva pois $a^1 = a, 1 \in \mathbb{N}$. Portanto $(a, a) \in R$.
- Antissimétrica pois se $a^r = b$ então $b^{\frac{1}{r}} = \pm a$, mas $\frac{1}{r} \notin \mathbb{N}$. Portanto $(a, b) \in R$, mas $(b, a) \notin R$.
- Transitiva pois se $a^r = b$ e $b^s = c$ então $a^{r \cdot s} = c, r \cdot s \in \mathbb{N}$. Então $(a, c) \in R$.

O conjunto destas qualidades configura que o conjunto R é de tipo parcialmente ordenado sobre $\mathbb{Z}$.

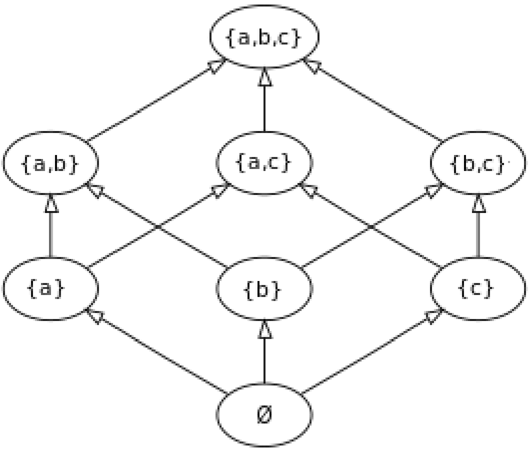
Exercício 9

Tal relação é:

- Reflexiva pois se $A = B$ então $(A, A) \in R$.
- Antissimétrica pois se $A \subset B$ então $B \not\subset A$. Portanto $(A, B) \in R$, mas $(B, A) \notin R$.
- Transitiva pois se $A \subseteq C$ e $C \subseteq B$ então $A \subseteq B$. Logo $(A, C) \in R$, $(C, B) \in R$ e $(A, B) \in R$.

O conjunto destas qualidades configura que o conjunto R é de tipo parcialmente ordenado.

Diagrama de Hasse para S = P({a,b,c})



Exercício 10

Uma relação de equivalência trata-se de uma relação binária que é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.

Assim sendo, a relação descrita é de tal tipo tido que ela é

- Reflexiva pois se $p = r$ e $q = s$ então $((p, q)(p, q)) \in R$.
- Simétrica pois se $pq = rs$ então $((p, q)(r, s)) \in R$ e $((r, s), (p, q)) \in R$.
- Transitiva pois se $pq = mn$ e $mn = rs$ então $((p, q), (m, n)) \in R$, $((m, n), (r, s)) \in R$ e $((p, q), (r, s)) \in R$.

Exercício 11

(Ida) A cardinalidade do conjunto $|\mathbb{Z}|$ é infinita, entretanto $P(\mathbb{Z})$ contém todos os subconjuntos possíveis de serem compostos por elementos de $\mathbb{Z}$, tal que $P(\mathbb{Z}) = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{2\}, \ldots, \{0, 1\}, \{0, -1\}, \ldots\}$. Assim $P(\mathbb{Z})$ contém incontáveis subconjuntos cada qual finito, tal que para dois subconjuntos A e B quaisquer a diferença simétrica entre estes também é finita pois $A \Delta B \subseteq A \cup B$.

(Volta) A relação R entre quaisquer conjuntos finitos é

- Reflexiva pois $A \Delta A = \varnothing$, um conjunto finito contendo nenhum elemento. Logo, $(A, A) \in R$.
- Simétrica pois $A \Delta B = B \Delta A$. Assim, $(A, B) \in R$ e $(B, A) \in R$.
- Transitiva pois se $A \Delta B$ é finita e $B \Delta C$ também, isso implica que $A \Delta C$ também será. Portanto $((A, B), (B, C) \in R) \implies ((A, C) \in R)$.

Finalmente, observa-se que R trata-se de uma relação de **equivalência**.

Exercício 12

Temos a relação $R = \{(a,b) \in \mathbb{R} : (b-a) \in \mathbb{Z}\}$, está é uma relação de equivalência pois

- esta é reflexiva: para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $(a-a) = 0$ e $0 \in \mathbb{Z}$, logo $(a,a) \in R$;
- esta é simétrica: pois o módulo da diferença de $b-a$ equivale àquele da diferença de $a-b$ em $\mathbb{Z}$, logo $(a,b),(b,a) \in R$;
- esta é transitiva pois se $(a-b),(b-c) \in \mathbb{Z}$ então $(a-c) \in \mathbb{Z}$, logo $(a,b),(b,c),(a,c) \in R$.

Assim, para qualquer valor $x \in \mathbb{R}$ dada a relação R sobre $\mathbb{R}$ tem-se a classe de equivalência $[x] = \{y \in \mathbb{R} : (x.y) \in R\}$ representativa de todos os valores aqueles para os quais a diferença $x-y$ produz um número inteiro.

Exercício 13

- R e R^{-1} são relações transitivas tais que $(a,b),(b,c),(a,c) \in R$ e $(c,b),(b,a),(c,a) \in R^{-1}$, logo $R \cap R^{-1}$ também é transitiva pois $(a,b),(b,c),(a,c),(c,b),(b,a),(c,a) \in R \cap R^{-1}$;
- R e R^{-1} são relações reflexivas, então $(a,a) \in R$, $(a,a) \in R^{-1}$ e portanto $(a,a) \in R \cap R^{-1}$;
- Finalmente, se (a,b) e (b,a) está em $R \cap R^{-1}$, tal qual demonstrado anteriormente, então $R \cap R^{-1}$ é também simétrica e constitui uma relação de equivalência.

Exercício 14

A relação $a \equiv b \pmod n$ denota existência da igualdade $a = kn + b$ para algum $k \in \mathbb{Z}^*$. Podemos notar que esta trata-se de uma relação de equivalência pois esta possui as características de

- reflexividade: existe $a \equiv a \pmod n$, para qualquer n quando $a = 0$ e para a quando $n > a$;
- simetria: $a \equiv b \pmod n$ se, e somente se, $b \equiv a \pmod n$.

$$a = kn + b \iff b = a \underbrace{-k}_{k_2} n = k_2 n + a$$

- transitividade: se $a \equiv b \pmod n$ e $b \equiv c \pmod n$, então $a \equiv c \pmod n$.

$$\begin{cases} a = kn + b \\ b = k_2 n + c \end{cases}$$
$$\therefore a = \underbrace{kn + k_2 n}_{k_3 n} + c = k_3 n + c$$

Exercício 15

Sejam A, B, C matrizes de dimensão $n \times n$ e P uma matriz inversível também de dimensão $n \times n$ tal que duas matrizes similares entre si, denotadas por $A \sim B$, estão relacionadas por $PAP^{-1} = B$. Esta relação de similitude trata-se de uma relação de equivalência pois:

- Esta é reflexiva: $A \sim A$

Prova: Seja P a matriz identidade I_n, $(I_n)^{-1} A I_n = A$. ■

- Esta é simétrica: $A \sim B$ se e apenas se $B \sim A$

Prova: se assumirmos que $A \sim B$, teremos

$$
\begin{aligned}
&P^{-1}AP = B \\
&\cancel{P(P^{-1}}AP) = P(B) \\
&(A\cancel{P)P^{-1}} = PBP^{-1} \\
&PBP^{-1} = A
\end{aligned}
$$

Seja Q uma matriz tal que $Q = P^{-1}$, logo $Q^{-1}BQ = A \implies B \sim A$

Assim, $A \sim B \iff B \sim A$ ■.

- Esta é transitiva: se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$

Prova: Por hipótese temos

$$
\begin{cases}
B = P^{-1}AP \\
C = Q^{-1}BQ
\end{cases}
$$
$$\therefore C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Seja W uma matriz tal que $W = PQ$, logo $C = W^{-1}AW \implies C \sim A$ ■

---

1. nUSP: 12543033; Turma 04 ↩