Resolução da Lista 4 da disciplina de Matemática Discreta

Feita por Guilherme de Abreu Barreto[1]

Funções

Exercício 1

a. Esta função está bem definida, embora não acomode mulheres lésbicas.

b. Está bem definida.

Exercício 2

Vamos admitir dois conjuntos quaisquer X, de tamanho n, e Y de tamanho m, sendo $m \geq n$, e $n, m \in \mathbb{N}$. Estes estão relacionados entre si pela função injetora $f : X \to Y$. Então, pela definição de função injetora, para quaisquer elementos $x_i, x_j, 1 \leq i < j \leq n$, em X para os quais $x_i \neq x_j$ correspondem dois valores $f(x_i)$ e $f(x_j)$ em Y os quais $f(x_i) \neq f(x_j)$. Logo, segue que a mesma função no sentido inverso $f^{-1} : Y \to X$ produz um pareamento de um para um tal que para quaisquer valores $f(x_i) \neq f(x_j)$ resultam valores $x_i \neq x_j$.

No mais, a função composta $f^{-1} \circ f$ comporta-se tal qual uma função identidade id_n para X se e somente se $m \geq n$. Por um lado, esta mapeia um valor x_i com ele próprio:

$$f^{-1} \circ f(x_i) = f^{-1}(f(x_i)) = x_i$$

Por outro, isso só é possível para valores de $i \leq n$ pois $(x_{n+1}, f(x_{n+1})) \notin f$.

Exercício 3

Vamos admitir que os conjuntos X, Y e Z possuam tamanhos r, s e t. Ainda, que os índices i, j, k são tais que $1 \leq k \leq t \leq j \leq s \leq i \leq r$, sendo $i, j, k, r, s, t \in \mathbb{N}$. Assim, $X = \{x_1, \dots x_r\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_t\}$. Segue da definição de sobrejeção que

- $\exists x_i \in X$ tal que $f(x_i) = y_j$ sendo $y_j \in Y$. Ainda, $Y = \{f(x_1), \dots, f(x_r)\}$.
- $\exists y_j \in Y$ tal que $g(y_j) = z_k$ sendo $z_k \in Z$. Ainda, $Z = \{g(y_1), \dots, g(y_s)\}$.

Assim, se aplicarmos a função $g \circ f$ sobre X teremos:

$$\{g \circ f(x_1), \dots, g \circ f(x_r)\} = \{g(f(x_1)), \dots, g(f(x_r))\} = \{g(y_1), \dots, g(y_s)\} = \{z_1, \dots, z_t\} = Z$$

Ou seja $g \circ f$ também é sobrejetora ao mapear $g \circ f : X \to Z$.

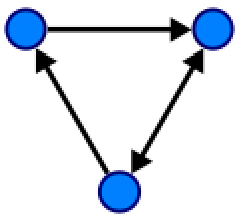
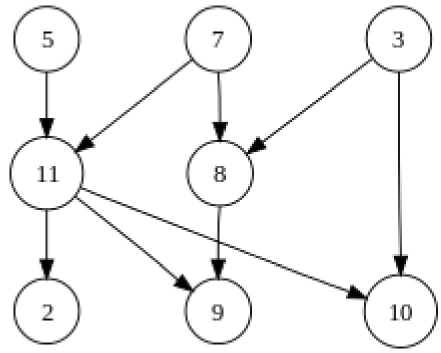
Exercício 4

Quando dizemos que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ estamos indicando que **para qualquer** número x tais expressões possuem o mesmo valor. Isso também pode ser interpretado dizendo que ambos os lados da igualdade representam **a mesma função**.

Retomando o problema em questão, temos que $g \circ f = h \circ f \implies g(f(x)) = h(f(x)), f(x) \in Y$. Como f é sobrejetora não existe elemento em Y, domínio tanto de g e h, o qual não possa ser descrito na forma $f(x)$. Assim sendo, se $g(f(x)) = h(f(x))$ para qualquer valor $f(x)$, por definição estamos falando de funções iguais entre si.

Exercício 5

Em concordância com a definição de função um grafo orientado é adequado a representação de função se e somente se este indica relações entre pares ordenados. Por exemplo:

<table>
<tr><th>Representativo de uma função</th><th>Não representativo de uma função</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

No primeiro gráfico vemos que para qualquer nó x à uma relação com um único $f(x)$. No segundo gráfico, um **grafo acíclico dirigido**, isso não ocorre: podemos destacar a relação $f(11) = \{2, 9, 10\}$.

Exercício 6

a. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ pode ser definida como

$$f = \{(x, y) : x = 2k \to y = 1 \veebar x = 2k + 1 \to y = -1, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Onde $\veebar$ é o sinal para a expressão "ou exclusivo"

b. Procederemos por exaustão.

- z_1 par e z_2 par implicam $z_1 + z_2$ par.

$$2k + 2k_2 = 2(k + k_2) = 2k_3$$

Logo,

$$f(z_1 + z_2) = 1 = 1 \cdot 1 = f(z_1)f(z_2)$$

- z_1 par e z_2 ímpar, ou vice versa, implica $z_1 + z_2$ ímpar.

$$2k + 2k_2 + 1 = 2(k + k_2) + 1 = 2k_3 + 1$$

Logo,

$$f(z_1 + z_2) = -1 = -1 \cdot 1 = f(z_1)f(z_2)$$

- z_1 e z_2 impares implicam, $z_1 + z_2$ par.

$$2k + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k + k_2 + 1) = 2k_3$$

Logo,

$$f(z_1 + z_2) = 1 = -1 \cdot -1 = f(z_1)f(z_2)$$

c. Procederemos por exaustão.

- z_1 par e z_2 par implicam $z_1 z_2$ par.

$$2k \cdot 2k_2 = 2(2kk_2) = 2k_3$$

Logo,

$$f(z_1 z_2) = 1 = 1 \cdot 1 = f(z_1)f(z_2)$$

- z_1 par e z_2 ímpar, ou vice versa, implica $z_1 z_2$ par.

$$2k(2k_2 + 1) = 2[k(2k_2 + 1)] = 2k_3$$

Logo,

$$f(z_1 z_2) = 1 \neq -1 \cdot 1 = f(z_1)f(z_2)$$

- z_1 e z_2 impares implicam, $z_1 z_2$ ímpar.

$$(2k + 1)(2k_2 + 1) = 4kk_2 + 2k + 2k_2 + 1 = 2(2kk_2 + k + k_2) + 1 = 2k_3 + 1$$

Logo,

$$f(z_1 z_2) = -1 \neq -1 \cdot -1 = f(z_1)f(z_2)$$

d. $f(x) = 1$.

Exercício 7

a. $f_{c,d} \circ f_{a,b}(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x)) = c(ax+b)+d = \underbrace{(ca)}_{=p}x + \underbrace{(cb+d)}_{=q} = f_{p,q}(x)$

b. $\{f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = a(cx+d)+b = (ca)x+(ad+b)$
$\therefore f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = f_{c,d} \circ f_{a,b}(x) \implies \cancel{(ca)x} + (cb+d) = \cancel{(ca)x} + (ad+b)$
$\implies b(c-1) = d(a-1)$

c. $f_{a,b} \circ f_{1,1} = f_{1,1} \circ f_{a,b} \implies a(x+1)+b = 1(ax+b)+1$
$\implies \cancel{ax} + \cancel{b} + 1 = \cancel{ax} + a + \cancel{b} \implies a = 1$

Assim sendo, desde que $a = 1$ esta expressão é verdadeira $\forall b \in \mathbb{R}$.

d. Sendo $y = f_{a,b}(x) = ax+b$, a função inversa pode ser expressa por:

$$x = ay + b \implies f_{a,b}^{-1}(x) = \frac{b-x}{a}$$

Exercício 8

Para a função

```
long long unsigned int ackermann (unsigned int m, unsigned int n) {
    if (m == 0)
        return n + 1;
    if (n == 0)
        return ackermann (m - 1, 1);
    return ackermann (m - 1, ackermann(m, n - 1));
}
```

Os resultados foram, respectivamente:

```
A(1,1) = 3
A(1,2) = 4
A(2,2) = 7
A(3,2) = 29
```

Para o valor $A(4,2)$ o algoritmo foi executado até que a memória a este alocada fosse esgotada (`segmentation fault`). Não obstante, conforme constata o artigo referente ao algoritmo na Wikipédia, computadores otimizados para esta tarefa calcularam o resultado de 19,729 dígitos decimais: $2^{65536} - 3$.

Exercício 9 (*Divertissement*)

Consideremos uma lista exaustiva dos infinitos números entre 0.0 e 1.0:

0.	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	$\dots$
0.	1	0	0	0	0	0	0	$\dots$
0.	3	3	3	3	3	3	3	$\dots$
0.	1	4	2	5	9	2	6	$\dots$
0.	9	9	9	9	8	9	7	$\dots$
0.	2	8	5	1	2	8	3	$\dots$
0.	4	2	8	5	1	5	2	$\dots$
0.	5	7	2	1	4	2	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Em seguida aplicamos sobre esta lista uma função em uma diagonal que altera o valor da entrada em uma unidade, digamos, $f = \{(x, y) : x < 9 \to y = x + 1 \veebar x = 9 \to y = 0\}$.

0.	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	$\dots$
0.	**2**	0	0	0	0	0	0	$\dots$
0.	3	**4**	3	3	3	3	3	$\dots$
0.	1	4	**3**	5	9	2	6	$\dots$
0.	9	9	9	**0**	8	9	7	$\dots$
0.	2	8	5	1	**3**	8	3	$\dots$
0.	4	2	8	5	1	**6**	2	$\dots$
0.	5	7	2	1	4	2	**2**	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

O número resultante é de forma tal que encontra-se contido nos reais, mas é diferente de todos os infinitos números aqueles com que cruza na tabela, pois difere destes em pelo menos um dígito. Por isso, os números reais são de grandeza superior a uma infinidade contável: estes são incontáveis.

---

1. nUSP: 12543033; Turma 04 ↩