

Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2021

Professor: José Ricardo G. Mendonça

6ª Lista de Exercícios – Princípios de contagem – 01 dez. 2021

O binômio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.

O que há é pouca gente para dar por isso.

Álvaro de Campos (Fernando Pessoa), 1935

I. Permutações e combinações

1. Em cada um dos itens a seguir, determine:
 - (a) O número de diagonais de um polígono convexo de n lados;
 - (b) Quantos números ímpares de 5 algarismos diferentes existem;
 - (c) O número de apostas distintas de 6 e de 7 números na loteria Mega-Sena;
 - (d) De quantas maneiras distintas podemos preencher uma prateleira com n livros diferentes, cada um com k exemplares idênticos;
 - (e) O número de maneiras de acomodar n pessoas em uma mesa redonda.
2. Quantos comitês podemos formar a partir de um grupo de 5 homens e 8 mulheres contendo
(a) 2 homens e 4 mulheres, (b) 4 homens e 2 mulheres ou (c) um presidente (homem ou mulher), 2 homens e 3 mulheres?
3. (a) Quantos anagramas a palavra *matemática* possui?
(b) Quantos anagramas da palavra *exercício* possuem todas as vogais juntas e todas as consoantes juntas?
4. Duas retas paralelas são marcadas uma em n pontos e outra em k pontos distintos.
 - (a) Quantos triângulos diferentes podemos formar usando esses pontos?
 - (b) Quantos quadriláteros diferentes podemos formar usando esses pontos?
5. O teorema fundamental da aritmética garante que todo número inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito na forma $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, onde os p_i são números primos e os expoentes $a_i \geq 1$ são números inteiros positivos. Por exemplo, $588 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2$. A partir dessa representação, determine o número de divisores de n .

6. Quantas combinações de 4 objetos tomados de 3 em 3 com possíveis repetições existem? Rotulando os objetos de a, b, c e d , liste todas essas combinações.
7. (a) Quantas soluções inteiras não negativas existem para a equação $x + y + z = 16$?
 (b) Quantas soluções inteiras positivas existem para a inequação $x + y + z + t < 14$?
 (c) Quantas soluções inteiras não negativas existem para a inequação $x + y + z \leq 21$?

Observação: números inteiros **não negativos** são maiores ou iguais a zero, enquanto números inteiros **positivos** são estritamente maiores que zero.

8. (a) Quantas sequências binárias de comprimento 8 possuem exatamente 4 zeros?
 (b) Quantas sequências binárias de comprimento 15 possuem mais zeros do que uns?
 (c) Quantas sequências binárias de comprimento n possuem exatamente $\lfloor n/2 \rfloor$ zeros?
Notação: $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x .

9. (a) Mostre que p números zero e $q \geq p - 1$ números um podem ser concatenados sem que dois números zero fiquem juntos de $\binom{q+1}{p}$ maneiras diferentes;
 (b) Mostre que o número $f(n)$ de sequências binárias de comprimento n que não possuem dois números zero juntos é dado por $f(0) = 1, f(1) = 2$ e $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$ para $n \geq 2$;
 (c) Comparando os resultados dos itens (a) e (b), mostre que

$$f(n) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \rfloor} \binom{n-p+1}{p}$$

e que a função $f(n)$ definida por esse somatório de fato observa as relações $f(0) = 1, f(1) = 2$ e $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$.^(a)

^(a)Os números $f(n)$ são conhecidos como *números de Fibonacci*, devido ao seu aparecimento no tratado *Liber Abaci*, de Leonardo de Pisa, o Fibonacci, em 1202, embora eles já fossem conhecidos em diversas culturas desde muito antes. Os primeiros números de Fibonacci são $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$ etc. ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$), de forma que nosso $f(n) = F_{n+2}$. Os números de Fibonacci possuem inúmeras propriedades matemáticas, das mais mundanas às mais arcanas, e vêm fascinando gerações de curiosos há séculos. De fato, existe até uma respeitosa publicação dedicada aos números de Fibonacci, a *The Fibonacci Quarterly* (ISSN: 0015-0517). Uma discussão abrangente dos números de Fibonacci pode ser encontrada no excelente livro-texto de R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed. (Reading: Addison-Wesley, 1994), Seção 6.6.

II. Coeficientes binomiais^(b)

1. Mostre que calcular 9^4 e 11^5 usando o teorema binomial é moleza. Generalize esses casos e encontre uma fórmula para expressões do tipo $(n \pm 1)^k$, $n \geq 1$, $k \geq 1$.
2. Determine o valor do maior termo no desenvolvimento de $(1 + \frac{1}{4})^{30}$.
3. Determine para que valores de k , $0 < k < n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é máximo.
4. Demonstre a identidade hexagonal

$$\binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} \binom{n}{k-1}.$$

Justifique o nome dado à identidade.

5. Use o teorema binomial (seja criativo) para calcular as seguintes somas (nos itens (c) e (d) as somas vão até o ponto em que seus termos começam a se anular):

(a) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$;

(b) $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2$;

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$;

(d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$.

6. Mostre que $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$. Essa identidade aparece na dedução do número de k -combinações de n objetos com repetições.

7. Mostre que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ pelos seguintes métodos:

(a) Mostre que $\binom{k+2}{3} - \binom{k}{3} = k^2$ e some sobre k ;

(b) Mostre que $\binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} = k^2$ e some sobre k usando o resultado do exercício II.6.

8. Mostre que $\binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j}$ para todo $j \leq k \leq i$ e que, portanto,

$$\sum_{j \leq k \leq i} (-1)^k \binom{i}{k} \binom{k}{j} = 0.$$

^(b)O estudante interessado em coeficientes e identidades binomiais deve consultar o livro-texto de R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed. (Reading: Addison-Wesley, 1994), Capítulo 5, ou, para um tratamento mais avançado, J. Riordan, *Combinatorial Identities* (New York: Krieger, 1979).

III. Princípio do pombo

1. Mostre que se você der n tiros em $m < n$ pombos e não errar nenhum tiro pelo menos um pombo vai acabar com mais do que um buraco de bala. (O nome *pigeonhole principle* em inglês para esse princípio matemático provavelmente advém dessa observação 😊)
2. Tendo eliminado os pombos de seu telhado, você decide dar 50 tiros num alvo quadrado de 70 cm de lado e não erra nenhum. Mostre que pelo menos dois tiros atingiram o alvo a menos de 15 cm de distância um do outro.
3. Dados 5 pontos quaisquer sobre uma esfera, mostre que é possível dividi-la em dois hemisférios fechados de tal forma que um deles contém pelo menos 4 dos pontos dados.
4. Mostre que em qualquer lista de n números inteiros positivos existem pelo menos dois elementos cuja diferença entre eles é divisível por $n - 1$.
5. Seja \mathcal{A} uma sequência formada pelas 26 letras do alfabeto latino em qualquer ordem.
 - (a) Mostre que \mathcal{A} possui pelo menos uma subsequência de 4 ou mais consoantes consecutivas;
 - (b) Supondo que \mathcal{A} comece com uma vogal, mostre que \mathcal{A} possui pelo menos uma subsequência de 5 ou mais consoantes consecutivas.
6. Mostre que em uma festa com $n \geq 2$ pessoas existem pelo menos duas pessoas com exatamente o mesmo número de conhecidos, assumindo que a relação de familiaridade é simétrica e não-reflexiva (se a conhece b então b conhece a , $a \neq b$). Este exemplo é oriundo da teoria dos grafos, com as pessoas no lugar dos vértices e as relações de familiaridade no lugar das arestas do grafo.
7. Suponha que cada ponto do plano (!) seja pintado de azul ou vermelho. Mostre que para qualquer valor real $d > 0$ existem dois pontos separados exatamente pela distância d que possuem a mesma cor. *Dica:* considere um triângulo equilátero.
8. Mostre que todo número inteiro positivo n possui pelo menos um múltiplo diferente de zero formado somente pelos dígitos 0 e 1 e encontre um desses múltiplos para os números 19 e 113. Você consegue pensar em um algoritmo que encontra esses múltiplos sem apelar para a força bruta, isto é, sem testar a divisibilidades de zilhões de números que sabemos de antemão que não vão dar em nada? *Dicas:* (i) o caso $n = 1$ é trivial; para $n \geq 2$, escreva todos os $n + 1$ números $u_k = \sum_{0 \leq i \leq k} 10^i$ para $0 \leq k \leq n$, isto é, $u_0 = 1$, $u_1 = 11$, \dots , $u_n = 11 \cdots 1$ ($n + 1$ dígitos 1); (ii) como só existem n possíveis restos da divisão de um número qualquer por n , pelo menos dois dos números u_k — digamos, u_i e $u_j > u_i$ — possuem o mesmo resto da divisão por n (veja o exercício III.4); (iii) se u_i e u_j

possuem o mesmo resto da divisão por n , então sua diferença $u_j - u_i > 0$ é um múltiplo de n que também é uma soma de potências distintas de 10 de coeficientes 0 ou 1.

IV. Princípio da inclusão-exclusão

1. Quantas soluções inteiras não negativas existem para a equação $x + y + z = 19$ satisfazendo as condições $x \leq 9$, $y \leq 5$ e $z \leq 14$?
2. Quantos números inteiros positivos menores ou iguais a 200 são divisíveis por 3 ou 11?
3. Quantos números inteiros positivos menores ou iguais a 170 são primos? *Dica*: um número composto menor ou igual a n deve possuir um divisor menor ou igual a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.
4. O número do cadastro de pessoas físicas (CPF) é formado por uma sequência de 11 dígitos. Quantos números de CPF contêm os dígitos 1, 3, 5, 7 e 9 pelo menos uma vez cada um em sua composição?
5. Quantas permutações de 5 objetos possuem menos do que 3 pontos fixos? *Observação*: os pontos fixos de uma permutação $(\sigma(1) \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ são pontos para os quais $\sigma(i) = i$; por exemplo, a permutação (24315) possui dois pontos fixos, $\sigma(3) = 3$ e $\sigma(5) = 5$.

V. Divertissement: Aproximações racionais

A formulação do princípio do pombo costuma ser atribuída ao matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859),^(c) que em 1842 utilizou-o para mostrar que para qualquer número real r e qualquer número inteiro positivo N existem números inteiros p e q com $0 < q \leq N$ tais que $|r - p/q| < 1/qN$.^(d) A aproximação de um número real r por um número racional com propriedades ótimas é conhecida como *aproximação diofantina*.^(e) Em seus trabalhos posteriores, Dirichlet se referia ao princípio do pombo como *Schubfachprinzip*, ou “princípio da gaveta”, em alemão. Vamos enunciar e demonstrar o teorema de Dirichlet:

Teorema (Dirichlet, 1842). Sejam r um número real e N um número inteiro positivo quaisquer. Então existem números inteiros p e q com $0 < q \leq N$ tais que $|r - p/q| < 1/qN$.

^(c)Há evidências de que o princípio do pombo já fosse conhecido anteriormente, cf. B. Rittaud e A. Heeffer, “The pigeonhole principle, two centuries before”, *The Mathematical Intelligencer*, v. 36, n. 2, pp. 27–29 (2014).

^(d)G. Lejeune Dirichlet, “Recherches sur les formes quadratiques a coefficients et a indéterminées complexes”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, v. 24, pp. 291–371 (1842), em especial §13; G. Lejeune Dirichlet, “Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen”, *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1842), pp. 93–95.

^(e)A análise diofantina trata das soluções inteiras para equações algébricas e das aproximações racionais para números reais. O nome vem de Diofanto de Alexandria, matemático grego do século III que por volta do ano 250 d. C. escreveu o tratado *Aritmética* sobre questões dessa natureza.

Demonstração. As partes fracionárias (resíduos mod 1) dos números rk , $0 \leq k \leq N$, formam um conjunto de $N + 1$ números em $[0, 1)$. Se dividirmos o intervalo $[0, 1)$ em N subintervalos iguais, pelo princípio do pombo pelo menos um subintervalo vai conter dois resíduos diferentes, sejam eles $r_i = rk_i - n_i$ e $r_j = rk_j - n_j$ com $k_j > k_i$. Como os dois resíduos pertencem ao mesmo subintervalo, $|(rk_j - n_j) - (rk_i - n_i)| < 1/N$, e tomando $p = n_j - n_i$ e $q = k_j - k_i$ obtemos dois inteiros p e q com $0 \leq q \leq N$ tais que $|r - p/q| < 1/qN$. ■

O teorema de Dirichlet não fornece um método para a construção de aproximações diofantinas para um dado número real. O método clássico para a construção de tais aproximações é o das *frações contínuas*, que são frações (possivelmente infinitas) da forma

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

onde geralmente se assume que todos os elementos a_i , $i \neq 0$, são inteiros positivos.^(f)

Embora o resultado de Dirichlet não pareça grande coisa à primeira vista, ele possui aplicações profundas em matemática e, portanto, em ciência da computação. Por exemplo, o resultado de Dirichlet permitiu a Joseph Liouville (1809–1882) provar pela primeira vez, em 1844, que *números transcendentais* existem e construir explicitamente uma família deles na forma $L_a = \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k!}$, com a um número inteiro qualquer diferente de 0 e ± 1 .^(g) Alguns anos mais tarde, em 1874, Georg Cantor (1845–1918) mostrou que os números transcendentais não são enumeráveis—isto é, que a maioria esmagadora dos números reais é transcendente! —, introduzindo, de passagem, um novo método para construir esses números.^(h) Demonstrar que determinado número ou família de números é transcendental é um problema difícil, embora tanto as técnicas desenvolvidas nas tentativas quanto os eventuais números encontrados possuam diversas aplicações teóricas e práticas em potencial.⁽ⁱ⁾

^(f)Exposições detalhadas sobre frações contínuas aparecem em A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions* (New York: Dover, 1997) e R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed. (Reading: Addison-Wesley, 1994), Seções 4.5 e 6.7.

^(g)J. Liouville, “Mémoires et communications des membres et des correspondants de l’Académie” e “Nouvelle démonstration d’un théorème sur les irrationnelles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences*, v. XVIII, n. 20, pp. 883–885 e pp. 910–911 (1844).

^(h)G. Cantor, “Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 77, pp. 258–262 (1874).

⁽ⁱ⁾Números reais são chamados de *algébricos* quando podem ser obtidos como solução de uma equação algébrica (uma equação polinomial) contendo apenas coeficientes racionais, caso contrário eles são chamados de *transcendentais*. O fato de um número ser algébrico nada tem a ver com o fato dele ser racional: $\sqrt{2}$, por exemplo, é irracional mas é algébrico, pois é raiz da equação polinomial $x^2 - 2 = 0$. Por outro lado, todo número transcendental é irracional, uma vez que todo número racional é obviamente algébrico (se $x = p/q \in \mathbb{Q}$ então ele é raiz da equação $qx - p = 0$).

O teorema de Dirichlet encontra uma interessante aplicação em aritmética em ponto flutuante. Vamos primeiro estabelecer o seguinte fato: se $r = a/b$ é um número racional, então existe um intervalo aberto ao redor de r que não contém nenhuma aproximação racional para r com denominador igual a b . Pode-se ver isso reparando que se $p/q \neq r$, com p e $q \neq 0$ números inteiros, então $|qa - pb| \geq 1$, de onde segue que $|qr - p| \geq 1/b$. Dessa forma, enquanto o teorema de Dirichlet afirma que números *irracionais* podem ser aproximados por números racionais tão bem quanto se queira (basta tomar q suficientemente grande), o mesmo não pode ser feito para números *racionais*; obviamente não estamos considerando aproximar o número racional por ele próprio. Como os números em ponto flutuante usados para representar números reais nos computadores são necessariamente racionais (possuem um número finito de dígitos), esse é um assunto do maior interesse no design de hardware, por exemplo, *floating-point units* (FPUs), e de software. Por exemplo, se queremos representar no computador um número real r resultante de determinado cálculo, ele deve ser arredondado para um número em ponto flutuante de n bits. Tomando $q = 2^{n+1}$, estabelecemos um intervalo ao redor de r no qual nenhum número a meio caminho entre dois números com precisão de n bits pode estar. O design de um hardware ou algoritmo que efetua uma aproximação para r que caia *dentro* do intervalo excluído garante então que o valor aproximado obtido para r seja o melhor valor representável pela máquina.

As relações do teorema de Dirichlet com outras áreas da matemática e da ciência da computação são discutidos nos livros de Mark Kac e Stanislaw M. Ulam, *Mathematics and Logic: Retrospect and Prospects* (New York: Praeger, 1968), em particular na Seção 1.3, e Peter Markstein, *IA-64 and Elementary Functions: Speed and Precision* (Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000), em particular na Seção 6.3. O livro de Kac e Ulam, dois gigantes da matemática pura e aplicada do século XX, oferece um interessantíssimo passeio pelos mais diversos assuntos matemáticos, do princípio do pombal ao teorema de Gödel, através de exemplos em lógica, teoria das probabilidades elementar, álgebra linear, cálculo numérico, teoria dos jogos e teoria da informação. O segundo texto, de uma série de manuais profissionais da Hewlett-Packard, detalha a implementação em nível de processador (no caso, o IA-64 da Intel, também conhecido como Itanium) de algoritmos matemáticos básicos como os de divisão e de extração de raízes quadradas em ponto flutuante. Um dos avanços mais interessantes obtidos recentemente nessa área foi a descoberta do *fast inverse square root*, um algoritmo capaz de calcular uma excelente aproximação para $1/\sqrt{x}$ de um número em ponto flutuante até quatro vezes mais rapidamente que uma simples divisão! Esse método veio a público pela primeira vez no código-fonte

Os números π , a constante de Gelfond-Schneider $2^{\sqrt{2}}$ e a constante de Champernowne $0,123456789101112\dots$, construída pela concatenação dos números inteiros, são exemplos de números transcendentais. Também sabemos que os números de Liouville generalizados $L_a = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k!}$, com a um número algébrico no intervalo $(-1, 1)$, são transcendentais. Por outro lado, até hoje não se sabe se a constante de Euler-Mascheroni, dada por $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n) \simeq 0,57721\ 56649\dots$, é um número algébrico ou transcendental; na verdade, não se sabe sequer se γ é um número racional ou não!

do jogo *Quake III Arena*, de 1999, como parte de algoritmos de iluminação e traçado de raios. O aluno interessado deve consultar o artigo da Wikipedia [〈https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_inverse_square_root〉](https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_inverse_square_root) (acessado em 27 nov. 2021). Nesse artigo vocês poderão perceber como o conhecimento de geometria analítica elementar (o cálculo da norma de um vetor), cálculo diferencial (o método de Newton para extrair raízes quadradas), matemática discreta (representação binária de números) e um pouco de *hacking* são aspectos igualmente importantes na prática de programação.

★ — ★ — ★