Princípio do Pombal

Seja S um conjunto finito de cardinalidade n. Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_k$ partições de S em k subconjuntos. Então, pelo menos um subconjunto S_i de S contém pelo menos $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ elementos.

Corolário: Se um conjunto de n elementos é dividido em $k < n$ subconjuntos, então pelo menos um subconjunto contém mais de um elemento.

Outro corolário: Sejam m, n e k números inteiros positivos e não nulos. Se mn objetos são distribuídos em k conjuntos, $k < n$, então pelo menos um conjunto contém $m + 1$ objetos.

Demonstração: Procederemos por contradição, suponhamos que *nenhum* subconjunto S_i de S, sendo $|S| = n$, tenha $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ elementos.

Então o número máximo de elementos em qualquer S_i seria $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$.

E o total de elementos em S seria não mais que $k(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1) = k\lceil \frac{n}{k} \rceil - k$.

Dai tiramos duas possibilidades:

1. n é divisível por k. Então $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \frac{n}{k}$ é um número inteiro e $k\lceil \frac{n}{k} \rceil - k = n - k$. Logo:

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \frac{n}{k} \implies k \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - k = n - k$$

E assim,

$$|S| = \sum_{i=1}^{k} |S_i| \leq n - k < n$$

Isso contradiz a hipótese de que $|S| = n$.

2. n não é divisível por k. Então,

$$|S| = k \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - k < \frac{k(n+k)}{k} - k = n$$

Novamente, isso contradiz a hipótese de que $|S| = n$

Logo, por prova de contradição, necessita haver pelo menos $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ elementos em pelo menos um subconjunto $S_i \subseteq S$.