Resolução da Lista 6 da disciplina de Matemática Discreta

> Feita por Guilherme de Abreu Barreto[1]

Permutações e combinações

1.

a. Seja d o número de diagonais de um polígono convexo, e ℓ o número de lados deste mesmo, tem-se:

$$d = \frac{\ell(\ell - 3)}{2}$$

Demonstração

Por *diagonal*, referimo-nos a um segmento de linha que conecta dois vértices v não consecutivos de um polígono. Assim sendo:

1. Seja n o número de vértices, cada qual destes pode ser conectado a outros $n - 3$ vértices por uma diagonal, isto é: a todos os vértices senão àqueles adjacentes e a si próprio. Logo, o número de possíveis pontos de início e término para diagonais em um polígono é $n(n-3)$;

2. Entretanto, como a linha que conecta v_1 à v_n é idêntica àquela que conecta v_n a v_1, dividimos este total por 2 para obter o número de diagonais.

3. Finalmente, é trivial que o número de vértices de um polígono é correspondente a seu número de lados (o que pode ser demonstrado por indução finita), logo, n pode ser substituído na fórmula por ℓ. $\blacksquare$

b. 13 440

Demonstração

A quantidade n de números de 5 algarismos, todos diferentes entre si é uma combinação de 5 elementos, onde o último contém apenas algarismos ímpares, o primeiro contém apenas algaritmos não nulos e nenhum elemento possui o mesmo algarismo que qualquer outro. Iniciando nossa contagem dos elementos com maiores restrições para aqueles com menores, temos:

- O último elemento com 5 possíveis algarismos ímpares;
- O primeiro elemento com 9 possíveis algarismos não nulos menos um (8);
- O segundo elemento com 7 algarismos restantes;
- O terceiro elemento com 6 algarismos restantes;

- O quarto elemento com 5 algarismos restantes;

$$5 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 13\ 440 \blacksquare$$

c. 25 031 930 e 386 206 920 apostas, respectivamente.

Demonstração

> Para ganhar o prêmio máximo da Mega-Sena, denominado *sena*, é necessário obter coincidência entre seis dos números apostados e os seis números sorteados, de um total de seis dezenas (de um a sessenta), independentemente da ordem da aposta ou da ordem do sorteio.
>
> Fonte: artigo do Wikipédia

Assim, o número de apostas distintas de 6 e 7 números é dado pelas combinações $C(60,6)$ e $C(60,7)$, respectivamente.

$$C(60,6) = \frac{60!}{6!(60-6!)} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot \cancel{54!}}{6!\cancel{54!}} = 50\ 063\ 860$$

$$C(60,7) = \frac{60!}{7!(60-7!)} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot \cancel{53!}}{7!\cancel{53!}} = 386\ 206\ 920$$

d.

$$\frac{(nk)!}{(k!)^n}$$

Teorema

O número $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l, \theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots)$ de permutações de n objetos onde todos α , β, e θ são idênticos com quaisquer outros α, β e θ respectivamente, é:

$$P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_l,\theta_1,\ldots,\theta_m,\ldots}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\beta_1+\cdots+\beta_l+\theta_1+\cdots+\theta_m+\ldots} = \frac{(\alpha+\beta+\theta+\ldots)!}{\alpha!\beta!\theta!\ldots!} \blacksquare$$

e. $(n-1)!$

Demonstração

O número de permutações possíveis para n elementos distintos em sequência é dado por $n!$. Mas em uma sequência cíclica, como é o caso, quando todos os elementos são movidos para frente ou para trás em conjunto na sequência, não se contabiliza uma nova permutação:

$$\{1,2,3\} \equiv \{3,1,2\} \equiv \{2,3,1\}$$

Como uma sequência de n elementos pode ser movimentada para frente ou para trás em n maneiras **sem** produzir alteração, pela regra do produto, tem-se:

$$P_c = n! \cdot \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)!}{\cancel{n}} = (n-1)! \blacksquare$$

2.

a. $\frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4 \cdot 3!}}{\cancel{2 \cdot 3!}} \cdot \frac{\cancel{8}\, 2 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4!}} = 700 \blacksquare$

b. $\frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot \frac{8!}{2!(8-2)!} = 140 \blacksquare$

c. Se o presidente for homem:

$$13 \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{8!}{3!(8-3)!} = 4\,378$$

Senão:

$$13 \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{7!}{3!(7-3)!} = 4\,550$$

Então, pela regra da soma: $4\,378 + 4\,550 = 8\,928.$ $\blacksquare$

3.

a. $P_{10}^{m,a,t,e,i,c} = \frac{(m+a+t+e+i+c)!}{m!a!t!e!i!c!} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151\,200 \blacksquare$

b. Se agruparmos as consolantes e vogais, temos dois conjuntos de permutações, aqueles iniciados por vogais e aqueles iniciados por consoantes. Logo,

$$P_{e+i+o}^{e,i,o} \cdot P_{x+r+c}^{x,r,c} \cdot 2 = \frac{5!}{2!2!1!} \cdot \frac{4!}{1!1!2!} \cdot 2 = 720 \blacksquare$$

4.

a. $n \cdot \frac{k(k-1)}{2} + k \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nk}{2} \cdot (k-1+n-1)$
$= \frac{nk(n+k-2)}{2} \blacksquare$

b. $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{k(k-1)}{2} = \frac{nk(n-1)(k-1)}{2} \blacksquare$

5.

Conforme demonstro na lista 5, tópico 1, exercício 3, quaisquer par de números $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a > 1$ e $b > 1$ podem ser escritos como produtos de potências dos mesmos n números primos p, ainda que por diferentes expoentes (k e l). Por exemplo:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_n^{k_n} \quad b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} p_3^{l_3} \ldots p_n^{l_n}$$

Se para todo i, $0 \le l_i \le k_i$, b trata-se de um divisor de a. Assim, para aferir a variedade de divisores d_a de a necessitamos contabilizar o produto da quantidade de números primos p significativos pela quantidade ($k_i + 1$) de expoentes possíveis, os quais podem ou não serem iguais a 0, portanto:

$$d_a = \prod_{i=1}^{p} (k_i + 1) \blacksquare$$

6.

Pelo *método de Euler*, podemos aferir que o número de combinações com repetições R é:

$$R(4,3) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

As combinações são:

$$\begin{matrix} aaa & aab & aac & aad & abb \\ abc & abd & acc & acd & aad \\ bbb & bbc & bbd & bcc & bcd \\ bdd & ccc & ccd & cdd & ddd \end{matrix}$$

$$\blacksquare$$

7.

a. Utilizando o método de "bolas e barras" tem-se:

$$R(3,16) = \binom{3-1+16}{3-1} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = 153 \blacksquare$$

b. Por soluções inteiras positivas infere-se $x, y, z, t \ge 1$. Possuímos a fórmula para resolver uma **equação não negativa**, então venhamos a reformular a inequação nestes termos:

1. Seja $a = x - 1$, $b = y - 1$, $c = z - 1$ e $d = t - 1$, então

$$x + y + z + t < 14 \implies a + b + c + d \le 9$$

2. Seja f uma variável de "folga", tal que $0 \le f \le 9$, então

$$a + b + c + d + f = 9$$

Finalmente, aplicando-se o método,

$$R(5,9) = \binom{5-1+9}{5-1} = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!(13-4)!} = 715 \blacksquare$$

c. Seja $0 \leq f \leq 21 : f \in \mathbb{N}$

$$x + y + z + f = 21 \therefore R(4,21) = \binom{4-1+21}{4-1} = \binom{24}{3}$$
$$= \frac{24!}{3!(24-3)!} = 2\,024 \blacksquare$$

8.

a. $C(8,4) = \dfrac{8!}{4!(8-4)!} = 70 \blacksquare$

b. Para qualquer número binário com uma quantidade ímpar de dígitos é possível haver um número com maioria de dígitos 1 ou, senão, de dígitos 0. Os quais, por simetria, ocorrem em mesma quantidade. Assim, seja 2^{15} quantidade de números binários distintos de 15 dígitos (evento A), os números aqueles onde a quantidade de 0 predomina ocorre apenas para metade destes (evento B). Assim, pela regra do produto:

$$|A \times B| = |A||B| = 2^{15} \cdot \frac{1}{2} = 2^{14} \blacksquare$$

c. A quantidade de sequências binárias de n dígitos as quais contêm, em qualquer ordem, $k = \lfloor n/2 \rfloor$ zeros é dada pelo conjunto $R(n,k)$ de k combinações de n objetos distintos os quais podem ocorrer cada qual até k vezes e somados totalizam k itens.

$$R(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

9.

a. Vamos representar uma sequência de p dígitos 0 e $q \geq p-1$ dígitos 1 sem formar pares de dígitos 0 por

$$\underbrace{1\ldots1}_{x_1}0\underbrace{1\ldots1}_{x_2}0\underbrace{1\ldots1}_{x_{p+1}} \therefore x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1} = q$$

Nas "urnas" 1 e $p+1$ pode haver qualquer número de dígitos 1, isto é, $x_1, x_{p+1} \geq 0$, mas na "urnas" 2 a p devem haver pelo menos um dígito 1 cada, de morma que $x_2, \ldots, x_p \geq 1$. Podemos uniformizar estas variáveis pela substituição $z_1 = x_1, z_2 = x_2 - 1, \ldots, z_p = x_p - 1, z_{p+1} = x_{p+1}$. Agora todos os $z_i \geq 0$ e ficamos com a equação

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_{p+1} = q - (p-1)$$

Esta possui

$$\binom{p+1-1+q-(p-1)}{p+1-1} = \binom{q+1}{p}$$

soluções, como queríamos demonstrar. ■

b. Seja $f(n) = \{x_1, \ldots x_n : x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 1, x_i + x_{i+1} \neq 0\}$.

- Para $f(0)$ a sequência binária resultante é nula $f(0) = \varnothing$. Na sequência nula não há pares de zeros, ou mesmo quaisquer dígitos, então esta é um exemplo de sequência que não possui pares de zeros: $|f(0)| = 1$.

- Enquanto, para $f(1)$ há duas sequência binárias possíveis : $\{0, 1\}$. Mas nenhuma destas possui pares de zeros, logo $|f(1)| = 2$.

À partir de então, demonstraremos a propriedade apresentada por **indução finita**:

- Para o caso base $n = 2$ os números binários possíveis são:

$$00 \quad 01 \quad 10 \quad 11$$

Destes, apenas um consiste em um par de zeros, logo $|f(2)| = 3 = |f(0)| + |f(1)| \square$

- Hipótese de indução: se $|f(n)| = |f(n-1)| + |f(n-2)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|f(n+1)| = |f(n)| + |f(n-1)|$

- ...

---

1. nUSP: 12543033; Turma 04 ↩