Resolução da Lista 6 da disciplina de Matemática Discreta

Feita por Guilherme de Abreu Barreto[1]

Coeficientes binomiais

1.

$9^4 = (10-1)^4 = \binom{4}{0}10^4 1^0 - \binom{4}{1}10^3 1^1 + \binom{4}{2}10^2 1^2 - \binom{4}{3}10^1 1^3 + \binom{4}{4}10^0 + 1^4$
$= 10\ 000 - 4\ 000 + 600 - 40 + 1 = 6\ 561\ \square$

$11^5 = (10+1)^5 = \binom{5}{0}10^5 1^0 + \binom{5}{1}10^4 1^1 + \binom{5}{2}10^3 1^2 + \binom{5}{3}10^2 1^3 + \binom{5}{4}10^1 1^4 +$
$\binom{5}{3}10^0 1^5$
$100\ 000 + 50\ 000 + 10\ 000 + 1\ 000 + 50\ \ + 1 = 161\ 051\ \square$

Generalizando-se estes casos para obter $(n \pm 1)^k, n, k \geq 1$, temos:

$$(n \pm 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i} (\pm 1)^i \ \blacksquare$$

2.

A fórmula do Termo Geral do Binômio, aplicado à $(x+a)^n$, é

$$T_{p\,+\,1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$$

Aplicando esta para a diferença de dois termos consecutivos do presente binômio, podemos encontrar a taxa de variação dos termos.

$$T_{p+1} - T_p = \binom{30}{p} 1^{30-p} \left(\frac{1}{4^p}\right) - \binom{30}{p-1} 1^{30\,-\,(p\,-\,1)} \left(\frac{1}{4^{p\,-\,1}}\right) =$$

$$\frac{30!}{p!(30-p)!} \cdot \frac{1}{4^p} - \frac{30!}{(p-1)!(31-p)!} \cdot \frac{1}{4^{p\,-\,1}} =$$

$$\frac{30!}{(p-1)!(30-p)!} \cdot \frac{1}{4^{p\,-\,1}} \left[\frac{1}{4p} - \frac{1}{31-p}\right]$$

...

3.

O coeficiente binomial é mínimo quando $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

E tende a aumentar para maiores valores de k, por exemplo:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Mas outra propriedade dos coeficientes binomiais é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!n!} = \binom{n}{n-k}$$

De tal forma que o coeficiente binomial tende ao valor mínimo conforme este aproxima-se dos valores 0 e n. Assim sendo o valor máximo é encontrado em valores intermediários entre estes dois valores, tal que

$$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rfloor} \blacksquare$$

4.

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$$

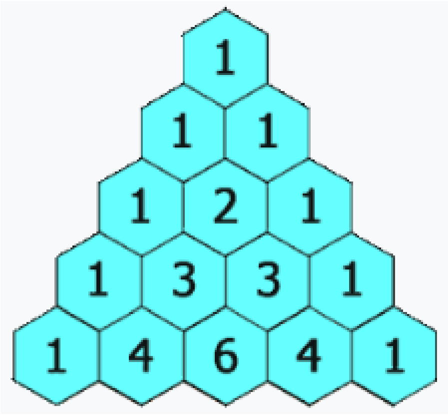
$$\implies \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$\implies \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot$$

$$\frac{k!(n-k)!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k+1)!}{(k+1)!(n-k+1)!} \implies 1 = 1$$

Seja feita a representação do triângulo de Pascal como se vê à seguir:



Para cada hexagono adjacente a outros seis, os números nestes hexagonos adjacentes são tais que, entre os hexagonos que não são adjacentes entre si:

- O produto destes é constante;
- O maior divisor comum também.

Essa é a **identidade hexagonal** do triângulo de Pascal.

5.

a.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Demonstração

Procederemos por indução finita para $\forall n \in \mathbb{N}$

Base de indução $(n = 0)$

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i}^2 = \binom{0}{0}^2 = 1 = \binom{2 \cdot 0}{0}$$

Hipótese se indução

Se

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

então

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}^2 = \binom{2(n+1)}{n+1}$$

Passo de indução

$$\sum_{i\,=\,0}^{n+1} \binom{n+1}{i}^2 = \binom{n+1}{0}^2 + \sum_{i\,=\,1}^{n} \binom{n+1}{i}^2 + \binom{n+1}{n+1}^2$$

$$= 1 + \sum_{i\,=\,1}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right)^2 + 1$$

$$= 1 + \sum_{i\,=\,1}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1}^2 + 2\binom{n}{i-1}\binom{n}{i} + \binom{n}{i}^2\right) + 1$$

$$= \left(\sum_{i\,=\,1}^{n} \binom{n}{i-1}^2 + 1\right) + \left(1 + \sum_{i\,=\,1}^{n} \binom{n}{i}^2\right) + 2\sum_{i\,=\,1}^{n} \left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i}\right)$$

$$= \left(\underbrace{\sum_{i\,=\,0}^{n\,-\,1} \binom{n}{i}^2}_{\text{Translação do índice}} + \binom{n}{n}^2\right) + \left(\binom{n}{0}^2 + \sum_{i\,=\,1}^{n} \binom{n}{i}^2\right) + 2\sum_{i\,=\,1}^{n} \left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 + 2\sum_{i\,=\,1}^{n} \left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i}\right)$$

$$= \underbrace{\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n}}_{\text{Por hipótese}} + 2\sum_{i\,=\,1}^{n} \left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i}\right)$$

Avaliemos o termo $2\sum_{i\,=\,1}^{n} \left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i}\right)$

A identidade Chu-Vandermonde nos dá:

$$\sum_{i} \binom{r}{i}\binom{s}{k-i} = \binom{r+s}{k}$$

Pela regra da Simetria dos Coeficientes Binomiais, essa relação pode ser escrita como:

$$\sum_{i}\binom{r}{i}\binom{s}{s-k+i}=\binom{r+s}{k}$$

Substituindo as variáveis r e s por n, $s-k$ por -1 e k por $n+1$, temos:

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}^2=2\binom{2n}{n}+2\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i}\right)=$$

$$2\binom{2n}{n}+2\binom{2n}{n+1}=\underbrace{2\binom{2n+1}{n+1}}_{\text{Regra de Pascal}}=\underbrace{\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}}_{\text{Regra da Simetria}}$$

$$=\underbrace{\binom{2n+2}{n+1}}_{\text{Regra de Pascal}}=\binom{2(n+1)}{n+1}\ \blacksquare$$

b.

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=\delta_{n0}$$

Onde δ_{n0} denota o delta de Kronecker:

$$\delta_{ij}\begin{cases}0 & se\ i\neq j,\\ 1 & se\ i=j.\end{cases}$$

Demonstração

Temos dois casos a avaliar: $n=0$ e $n\neq 0 \implies n>0$.

- $n=0$:

$$\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{0}{i}=(-1)^0\binom{0}{0}=1\cdot 1=1\ \square$$

- $n>0$:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=\binom{n}{0}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\underbrace{\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}}_{\text{Pela Regra de Pascal}} \right) + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} - \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} - (-1)^i \binom{n-1}{i} \right) + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} - \left((-1)^0 \binom{n-1}{0} - \cancel{(-1)^1 \binom{n-1}{1} + (-1)^1 \binom{n-1}{1}} - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \cancel{(-1)^{n-2} \binom{n-1}{n-2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{n-2}} - (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \right) + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n-1}{0} + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$\cancel{1 - 1} + \cancel{(-1)^{n-1} + (-1)^n} = 0 \blacksquare$$

c.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Demonstração

Para provar a proposição anterior, venhamos, primeiramente, a demonstrar o seguinte lema.

Lema

Para todo $n \in N$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Demonstremos este Teorema por indução finita.

1. Base de indução ($n = 0$):

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} = \binom{0}{0} = 1$$

2. Base de indução: se

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

então

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1}$$

3. Passo de indução

$$\sum_{i=0}^{n+1} = \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}}_{\text{Regra de Pascal}} \right) + \binom{n+1}{n+1}$$

$$= \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}}_{\text{Translação do índice}} + \binom{n}{n} \right) + \left(\binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \underbrace{2^n + 2^n}_{\text{Por hipótese}} = 2^{n+1} \square$$

Então temos que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^n$$

e pela demonstração do exercício **5. b** anterior, para $n > 0$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots = 0$$

Ao somar a segunda equação à primeira, obtemos

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots = 2\sum_{i\,=\,0}^{n}\binom{n}{2i} = 2^n \therefore \sum_{i\,=\,0}^{n}\binom{n}{2i} = 2^{n-1} \blacksquare$$

d.

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = \sum_{i\,=\,0}^{n}\binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$$

Demonstração

De maneira análoga ao exercício **5. c**, se por outro lado subtrairmos a segunda equação da primeira, teremos:

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{5} + \cdots = 2\sum_{i\,=\,0}^{n}\binom{n}{2i+1} = 2^n$$

$$\therefore \sum_{i\,=\,0}^{n}\binom{n}{2i+1} = 2^{n-1} \blacksquare$$

6.

Demonstraremos esta identidade por indução finita, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Base de indução $(n = 0)$

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+0+1}{k+1}$$

Hipótese de indução

Se

$$\sum_{i\,=\,0}^{n}\binom{k+i}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Então

$$\sum_{i\,=\,0}^{n+1}\binom{k+i}{k} = \binom{k+n+2}{k+1}$$

Passo de indução

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{k+i}{k} = \sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k} + \binom{k+n+1}{k}$$

$$= \underbrace{\binom{k+n+1}{k+1}}_{\text{Por hipótese}} + \binom{k+n+1}{k} = \underbrace{\binom{k+n+2}{k+1}}_{\text{Pela regra de Pascal}} \blacksquare$$

7.

Some sobre k?

8.

Para demonstrar esta propriedade, iremos antes demonstrar o seguinte lema.

Lema

Todo coeficiente multinomial da forma

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$$

Pode ser expresso como produto de coeficientes binomiais na forma

$$\binom{k_1+k_2}{k_1}\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1+k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}}$$

Procederemos nesta demonstração por indução finita.

Base de indução ($n=2$)

$$\underbrace{\binom{k_1+k_2}{k_1,k_2} = \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!}}_{\text{Pela definição de coeficiente multinomial}} \underbrace{= \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!((k_1+k_2)-k_1)!} = \binom{k_1+k_2}{k_1}}_{\text{Pela definição de coeficiente binomial}}$$

Hipótese de indução

Se

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \binom{k_1+k_2}{k_1}\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1+k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}}$$

Então

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}{k_1,k_2,\ldots,k_{n+1}} = \binom{k_1+k_2}{k_1}\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1+k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}{k_1+k_2+\cdots+k_n}$$

Passo de indução

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}{k_1,k_2,\ldots,k_{n+1}} = \underbrace{\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n+k_{n+1})!}{k_1!k_2!\ldots k_n!k_{n+1}!}}_{\text{Pela definição}} \cdot \underbrace{\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}}_{=1}$$

$$= \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \cdot \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n+k_{n+1})!}{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!k_{n+1}}$$

$$= \underbrace{\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n}}_{\text{Em forma de coeficiente multinomial}} \underbrace{\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_{n+1}}{k_1+k_2+\cdots+k_n}}_{\text{Em forma de coeficiente binomial}} =$$

$$\underbrace{\binom{k_1+k_2}{k_1}\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1+k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}}}_{\text{Por hipótese}}\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n+k_{n+1}}{k_1+k_2+\cdots+k_n}$$

Demonstração

Agora, prosseguiremos por demonstração direta.

$$\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \binom{j+(k-j)+(i-k)}{(k-j)+j}\binom{j+(k-j)}{j}$$

$$= \underbrace{\binom{(k-j)+(i-k)+j}{k-j,i-k,j}}_{\text{Expresso como multinômio}} = \underbrace{\binom{(k-j)+(i-k)+j}{(k-j)+(i-k)}\binom{(k-j)+(i-k)}{k-j}}_{\text{Novamente expresso como binômio}} =$$

$$\binom{i}{i-j}\binom{i-j}{k-j} = \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j} \;\square$$

Agora, não sei demonstrar a soma.