# Resolução da Lista 6 da disciplina de Matemática Discreta

Feita por Guilherme de Abreu Barreto[1]

## Princípio do Pombal

### 1.

Procederemos por contradição. Suponhamos que *nenhum* dos $m$ pombos, ao final do tiroteio, tenha mais de um buraco de bala. Se todos os tiros disparados atingiram um pombo, então no máximo $m$ tiros foram disparados. Mas, por hipótese, foram feitos $n$ disparos, $n > m$. Chegamos a uma contradição. Logo, pelo menos um pombo ao final do tiroteio haverá mais de um buraco de bala, tal qual pretendia-se demonstrar. ■

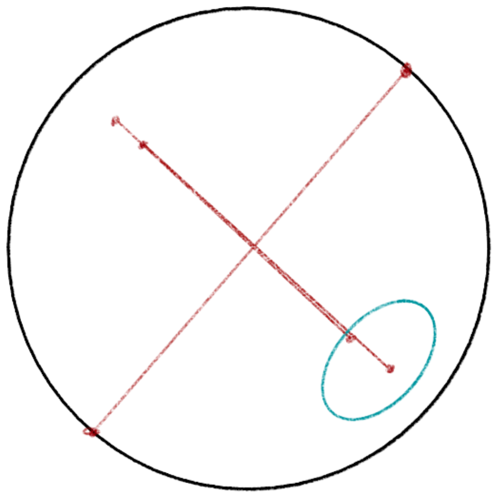
### 2.

Vamos admitir que eu seja o personagem *Revolver Ocelot*, da série *Metal Gear Solid*, e portando eu possa atingir meu alvo com precisão ilimitada. Buscando atingí-lo em pontos mais distantes possíveis entre si, dispararia:

- primeiramente **dois** tiros em vértices opostos para uma distância máxima de $70\sqrt{2}$ cm;
- depois mais **dois** tiros nos vértices restantes para uma distância máxima de $70$ cm;
- mais **um** tiro ao centro, para uma distância máxima de $35\sqrt{2}$ cm;
- mais **quatro** tiros nos pontos médios dos lados, para uma distância máxima de $35$ cm;
- mais **quatro** tiros nos pontos médios dos segmentos de reta entre os pontos médios dos lados para uma distância máxima de $\frac{35\sqrt{2}}{2}$ cm;
- mais **doze** tiros nos pontos médios dos lados dos quatro quadrados menores formados pelos vértices dos nove primeiros tiros para uma distância máxima de $\frac{35}{2}$ cm;
- Assim, do 22º tiro em diante, a distância máxima entre dois acertos passa a ser $\frac{35\sqrt{2}}{4} \approx 12,3$ cm, nas diagonais dos quadrados formados pelos tiros anteriores. ■

### 3.

Considere o seguinte esboço com os pontos postos em extremidades opostas da esfera:



Seja $R$ o raio da esfera $D = \frac{\pi}{2}R$ a distância do o arco que separa cada um destes pontos, tal qual a image demostra, um circulo qualquer sobre a superfície da esfera com centro em um dos pontos e de raio $r < D$ é capaz de dividir esta em dois hemisférios fechados onde um destes contém um único ponto e o outro contém a todos os demais. De fato, para qualquer disposição de pontos, um círculo centrado em um dos pontos de raio menor que a distância até o ponto mais próximo é capaz de produzir mesmo efeito. ■

## 4.

## 5.

**a.** Das 26 letras do alfabeto, 5 delas são vogais: $a, e, i, o, u$. Em uma lista de letras estas podem ser postas em $21 - 1 = 20$ posições entre consoantes. Fossemos dispo-las de maneira a particionar o conjunto de consoantes em grupos de menor tamanho possível, o faríamos uniformemente a cada 4 consoantes. Assim sendo, para qualquer lista de letras a subconjuntos de consoantes de pelo menos quatro unidades de tamanho.

**b.** Ao começar com uma vogal, dispomos de quatro vogais para particionar 21 consoantes. Novamente, dispondo-as uniformemente nas 20 posições entre consoantes, ficamos com partições de 5 consoantes de tamanho.

## 6.

## 7.

Temos duas cores possíveis: azul ou vermelho, e três pontos distintos $p_1, p_2, p_3$ separados entre sim por uma distância $d$, formando um triângulo equilátero. Seja $p_1$ azul.

- Se $p_2$ ou $p_3$ for azul, não resta nada a provar;

- Senão, ambos são vermelhos, e estão separados entre si por uma distância $d$, o que satisfaz a hipótese.

E de maneira simétrica, o mesmo ocorre para qualquer outro ponto e par a cor vermelha. $\blacksquare$

## 8.

---

1. Número USP: 12543033; Turma: 04; ↩