Resolução da <u>Lista 1</u> da disciplina "Matrizes, Vetores e Geometria Analítica"

Exercício 1

Sejam u, v e w vetores de um espaço vetorial qualquer. Mostre que se $u + v = u + w$, então $v = w$.

Resolução

São propriedades da adição em espaços vetoriais:

1. Existe um elemento neutro, aqui indicado por e, que não altera o resultado de uma adição ao ser acrescentado nesta.

$$\exists\, e \in V \mid u + e = u \quad \forall u \in V$$

2. Para todo elemento u existe um *oposto* $(-u)$ tal que:

$$\exists\, (-u) \in V \mid u + (-u) = e \quad \forall u \in V$$

Assim o sendo,

$$u + v = u + w \implies u + v + e = u + w \implies u + v + u + (-u) = u + w$$
$$\implies u + (-u) + v = u + (-u) + w \implies e + v = e + w \implies v = w \blacksquare$$

Exercício 2

Mostre que, para todo espaço vetorial V, o vetor nulo e é único.

Resolução

Vamos admitir, por absurdo, que existe um elemento $g \neq e$ que, sendo um elemento nulo, satisfaz a propriedade de não alterar o resultado de uma adição.

$$\exists\, g \in V, g \neq e \mid u + g = u \qquad \forall u \in V$$

Assim,

$$u + e = u + g \implies u + e + e = u + g$$
$$\implies u + u + (-u) + e = u + g$$
$$\implies u + (-u) + e = u + (-u) + g \implies e + e = e + g$$
$$\implies e = g$$

Chegamos a uma contradição. Logo, pela definição de elemento nulo, só é possível a existência de um elemento deste tipo. $\blacksquare$

Exercício 3

Para cada vetor u de um espaço vetorial V existe um único vetor $(-u)$ oposto de u.

Resolução

Novamente, procederemos por absurdo ao afirmar que existe um elemento $g \neq (-u)$ tal que satisfaz a condição de *oposto* de u:

$$\exists\, g \in V \mid u + g = e \quad \forall u \in V$$

Lembrando que adições entre vetores possuem a propriedade de serem associativas:

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$$

Logo,

$$-u = -u + e = -u + (u + g) = (-u + u) + g = e + g = g$$

Chegamos a uma contradição. Logo, pela definição de oposto, para cada u existe apenas um único elemento oposto $-u$. $\blacksquare$

Exercício 4

Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $u = (x_1, x_2) \in V$ e $v = (y_1, y_2) \in V$, então V , com as operações de adição:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha u = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

Exercício 5

Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $u = (x1, x2) \in V ev = (y1, y2) \in V$, então V , com as operações de adição:

$$u + v = (x1 + y1, x2 + y2)$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha u = (-\alpha x1, -\alpha x2)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

Resolução (exercícios 4 e 5)

O $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ quando definidas a adição e multiplicação por um número real.

Verificação dos axiomas relativos à **adição**:

- **Comutação:** $((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1, y_1,) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3))$
- **Associação:** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
- **Elemento nulo:** no caso, $(0, 0)$
- **Oposto:** Para cada $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-w = (-x, -y)$

Verificação dos axiomas relativos à **multiplicação**:

- $(ab)(x, y) = ((ab)x, (ab)y) = (a(bx), a(by)) = a(bx, by) = a(b(x,y))$
- $(a + b)(x, y) = ((a + b)x, (a + b)y) = (ax + bx, ay + by) = (ax, ay) + (bx, by) = a(x,y) + b(x, y)$
- $a((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = a(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (a(x_1 + x_2), a(y_1 + y_2)) = (ax_1 + ax_2, ay_1 + ay_2) = (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)$
- $1(x,y) = (1x, 1y) = (x, y)$

Em ambos os casos (exercícios 4 e 5) a soma corresponde com aquilo que aqui foi exposto, mas a multiplicação diverge: $\alpha u = \alpha^2 u$ e $\alpha u = -\alpha u$ só seriam possíveis se $v = \emptyset$, e assim $\alpha e = \alpha^2 e$ e $\alpha e = -\alpha e$. ■

Exercício 6

Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

Resolução

Um conjunto W é subespaço se, e somente se,

- $W \neq 0$
- É possível a adição: $(u, v) \in W \mapsto u + v \in W$

- É possível a multiplicação escalar: $(a, u), a \in \mathbb{R}, u \in W \mapsto au \in W$

Venhamos a conferir estas propriedades em cada caso:

- [x] $W = \{(x, y, z) \in V : x + y + z = 0\}$

$x + y + z = 0 \implies z = -(x + y)$. Então, se $u = (a, b, -(a + b))$ e $v = (c, d, -(c + d))$:

Adição: *u + v = (a, b, - (a + b)) + (c, d, - (c + d)) = (a + c, a + d, -((a + c) + (a + d)));*

Multiplicação: *αu = (αa, αb, - (αa + αb)).*

- [ ] $W = \{(x, y, z) \in V : x \geq y \geq z\}$

Adição: u + v = $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, *onde* $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$;

Multiplicação: $\alpha x_1 \geq \alpha y_1 \geq \alpha z_1$ para $\alpha \geq 0$, mas $\alpha x_1 \leq \alpha y_1 \leq \alpha z_1$ para $\alpha < 0$.

- [x] $W = \{(x, y, z) \in V : x - 3z = 0\}$

Adição: u + v = $(3z_1, y_1, z_1) + (3z_2, y_2, z_2) = (3(z_1 + z_2), (y_1 + y_2), z_1 + z_2)$

Multiplicação: αu = $(3\alpha z_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

- [ ] $W = \{(x, y, z) \in V : x \in \mathbb{Z}\}$

Adição: u + v = $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$

Multiplicação: αu = $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$

- [ ] $W = \{(x, y, z) \in V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \implies x = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

Soma: $u + v = \left(\pm\sqrt{1 - y_1^2 - z_1^2}, y_1, z_1\right) + \left(\pm\sqrt{1 - y_2^2 - z_2^2}, y_2, z_2\right)$
$= \left(\pm\sqrt{1 - y_1^2 - z_1^2} \pm \sqrt{1 - y_2^2 - z_2^2}, y_1 + y_2, z_1 + z_2\right)$

Assim o sendo, W não é espaço vetorial pois:

$$\pm\sqrt{1 - y_1^2 - z_1^2} \pm \sqrt{1 - y_2^2 - z_2^2} \neq \pm\sqrt{1 - (y_1 + y_2)^2 - (z_1 + z_2)^2}$$

- [ ] $W = \{(x, y, z) \in V : x \geq 0\}$

Uma multiplicação $\alpha x \mapsto \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_*^+$

- [x] $W = \{(x, y, z) \in V : xy = 0\}$

Sim, tá valendo. Ex.: Bases Canônias

- [ ] $W = \{(x, y, z) \in V : x = z^2\}$

Adição: *u + v = (z_1^2^, y_1, z_1) + (z_2^2^, y_2, z_2) = (z_1^2^ + z_2^2^, y_1 + y_2, z_1 + z_2)*. Como z_1^2^ + z_2^2^ ≠ (z_1 + z_2)^2, W não é subespaço vetorial.

Exercício 7

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V . Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

Resolução

Procederemos nesta demonstração com uma prova por absurdo. Consideremos que existe $W_1 \cup W_2$ tal que $W_1 \nsubseteq W_2$ e $W_2 \nsubseteq W_1$. Logo, existem dados elementos u e v tais que

$$\begin{array}{lll} u \in W_1, & u \notin W_2 & u \in W_1 \cup W_2 \\ v \in W_2, & v \notin W_1 & v \in W_1 \cup W_2 \end{array}$$

Sendo $W_1 \cup W_2$ espaço vetorial, a soma dos vetores v e u necessita também estar contida neste. Ainda, por ser uma união, esta necessita estar presente em W_1 ou W_2. Consideremos que $u + v$ está presente em W_1. Assim o sendo, a seguinte soma é possível:

$$(u + v) + (-u)$$

Pois por hipótese W_1 é espaço vetorial, e o oposto do vetor u também necessita estar contido neste pois é produto da multiplicação de u pelo escalar -1. Assim sendo,

$$(u + v) + (-u) = (u + (-u)) + v = e + v = v$$

Chegamos à um absurdo. Pois assumimos que v não estava contido em W_1. E de maneira análoga, chegaríamos ao mesmo absurdo com relação à u em W_2. Assim sendo, $W_1 \subseteq W_2$ e $W_2 \subseteq W_1$. Mas seria $W_1 \cup W_2$ subvetor de V? Vejamos:

$$\begin{cases} W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 \cup W_2 = W_2 \therefore W_2 \subset V \implies (W_1 \cup W_2) \subset V \\ W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 \cup W_2 = W_1 \therefore W_1 \subset V \implies (W_1 \cup W_2) \subset V \end{cases}$$

Fica demonstrado também que $W_1 \cup W_2 \subset V$ ■