<u>Lista 3</u> - Matrizes, Vetores e Geometria Analítica

1. Verifique se as transformações abaixo são lineares

> Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $F : U \to V$ é chamada *transformação linear* de U em V se, e somente se,
>
> 1. $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$ e
> 2. $F(\alpha u) = \alpha F(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in U$.

- [x] $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x, y, z) = x + 5y - z$;

$\bullet\ T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$
$= x_1 + 5y_1 - z_1 + x_2 + 5y_2 - z_2$
$= (x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$
$= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\ \blacksquare$

$\bullet\ T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha x + 5\alpha y + \alpha z = \alpha(x + 5y + z) = \alpha T(x, y, z)$

- [ ] $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x, y, z) = x + 5y - z + 1$;

$\bullet\ T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) =$
$x_1 + 5y_1 + z_1 + 1 + x_2 + 5y_2 + z_2 + 1$
$= (x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + 2$
$\neq (x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + 1$
$= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\ \blacksquare$

- [ ] $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x, y, z) = x^2 + 5y - z$;

$\bullet\ T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$
$= x_1^2 + 5y_1 + z_1 + 1 + x_2^2 + 5y_2 + z_2$
$= (x_1^2 + x_2^2) + 5(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$
$\neq (x_1 + x_2)^2 + 5(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$
$= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\ \blacksquare$

- [x] $T : \mathbb{P}_n(t) \to \mathbb{P}_n,\ T(p) = p' + p''$;

$\bullet\ T(p_1) + T(p_2) = p_1' + p_1'' + p_2' + p_2'' = (p_1' + p_2') + (p_1'' + p_2'') = T(p_1 + p_2)$

$\bullet\ T(\alpha p) = \alpha p' + \alpha p'' = \alpha(p' + p'') = \alpha T(p)\ \blacksquare$

2. Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo: representá-las graficamente

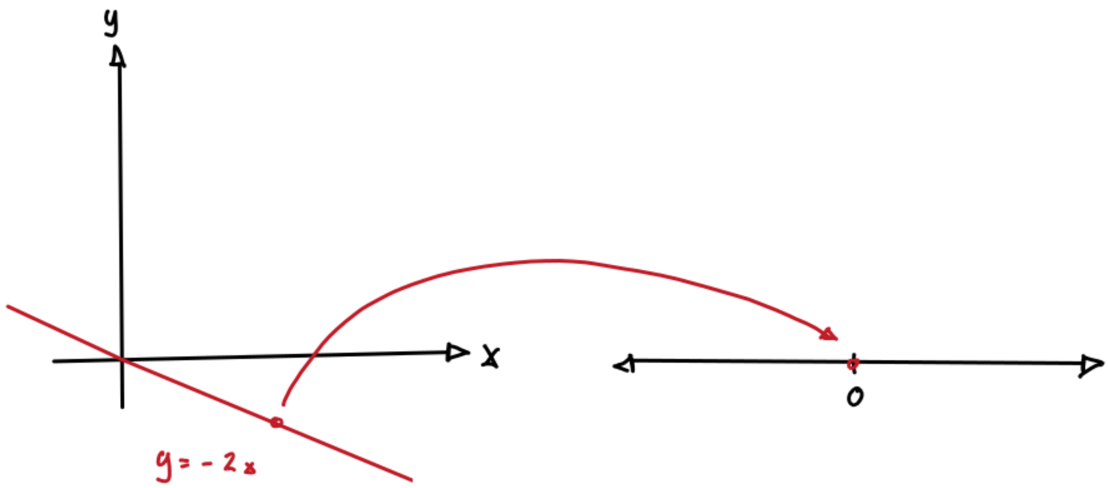
Definição de Núcleo: Sejam U e V espaços vetoriais de \R e F: U \to V uma transformação linear. Indica-se por \text{Ker}(F) e denomina-se o *núcleo* de F o seguinte subconjunto de U:

$$\text{Ker}(F) = \{u \in U | F(u) = e\}$$

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = y + 2x;$

$(x, y) \in \text{Ker}(T) \iff y + 2x = 0 \implies y = -2x$

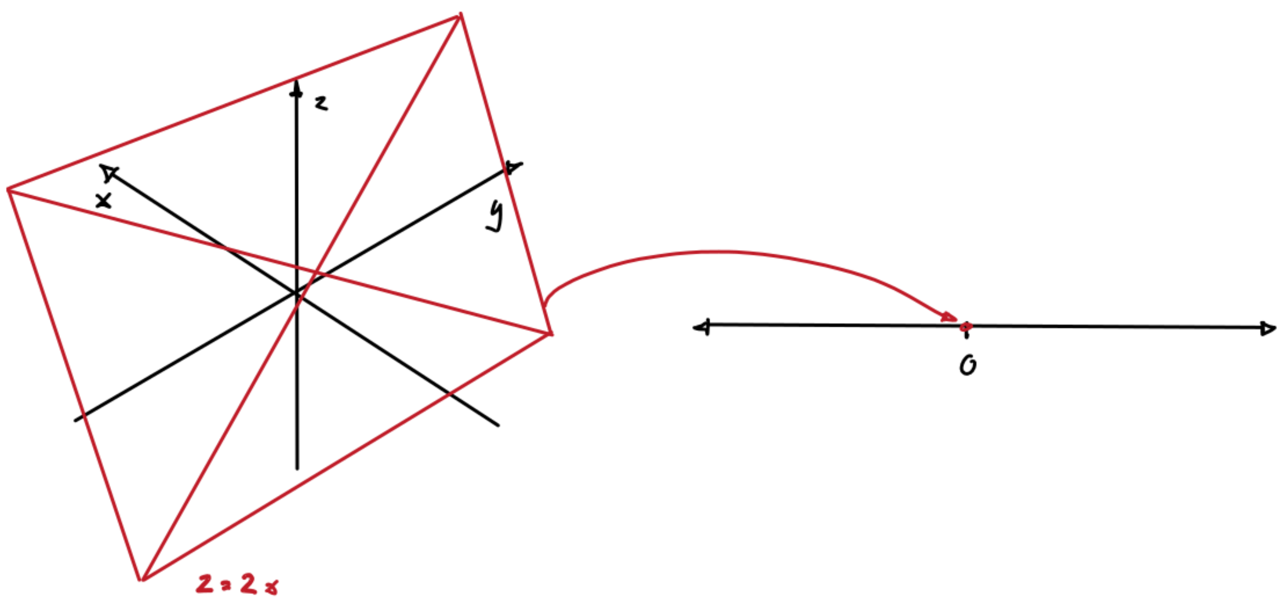
Logo, $\text{Ker}(T) = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$ ■



- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ T(x, y, z) = z - 2x;$

$(x, y, z) \in \text{Ker}(T) \iff z - 2x = 0 \implies z = 2x$

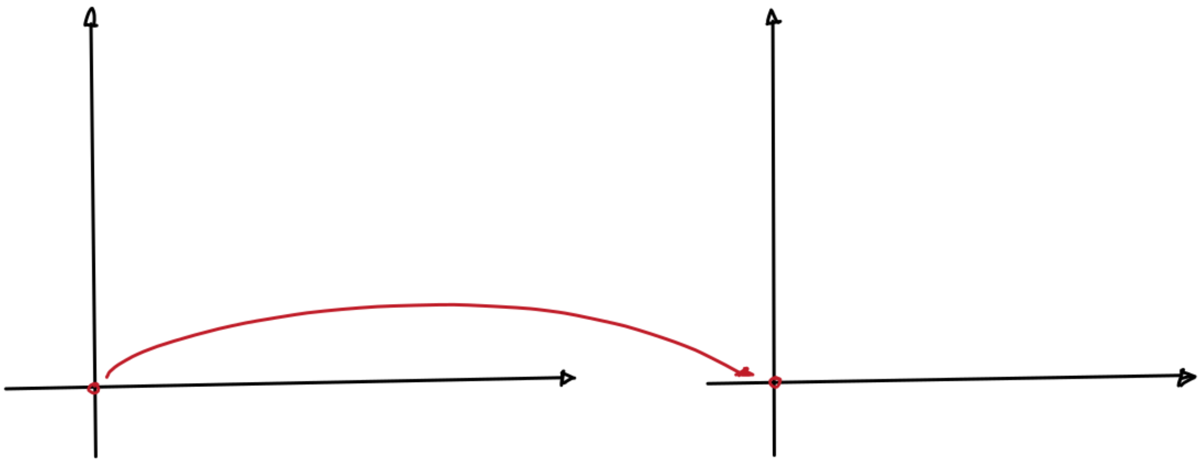
Logo, $\text{Ker}(T) = \{(x, y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ■



- $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (2x+2y, x+y);$

$$(x,y) \in \operatorname{Ker}(T) \iff (2x+2y, x+y) = (0,0) \implies \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \therefore x = -y = 0$$

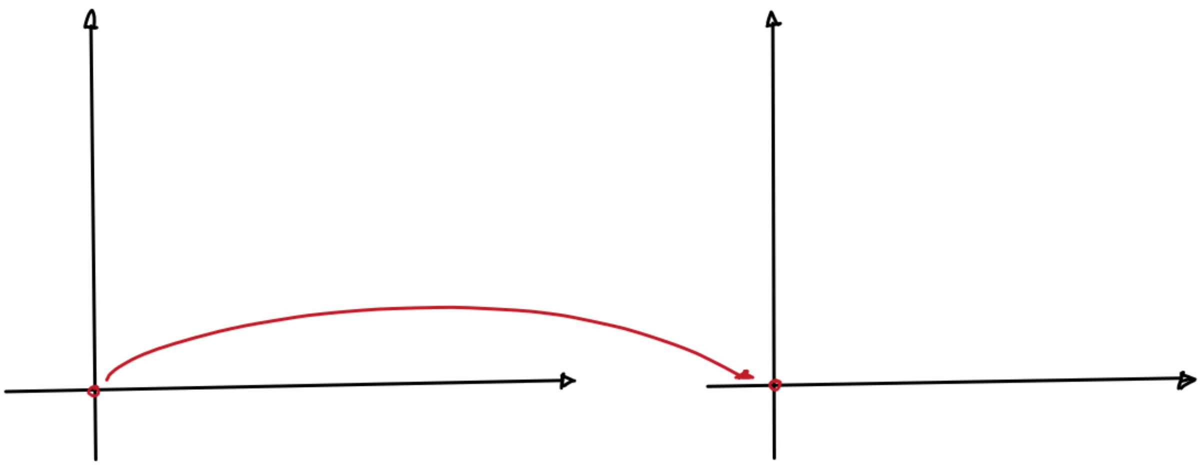
Logo, $\operatorname{Ker}(T) = \{(x,y) : x = y = 0\}$ ■



- $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x+y, x-y);$

$$(x,y) \in \operatorname{Ker}(T) \iff (x+y, x-y) = (0,0) \implies \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \therefore x = y = 0$$

Logo, $\operatorname{Ker}(T) = \{(x,y) : x = y = 0\}$ ■

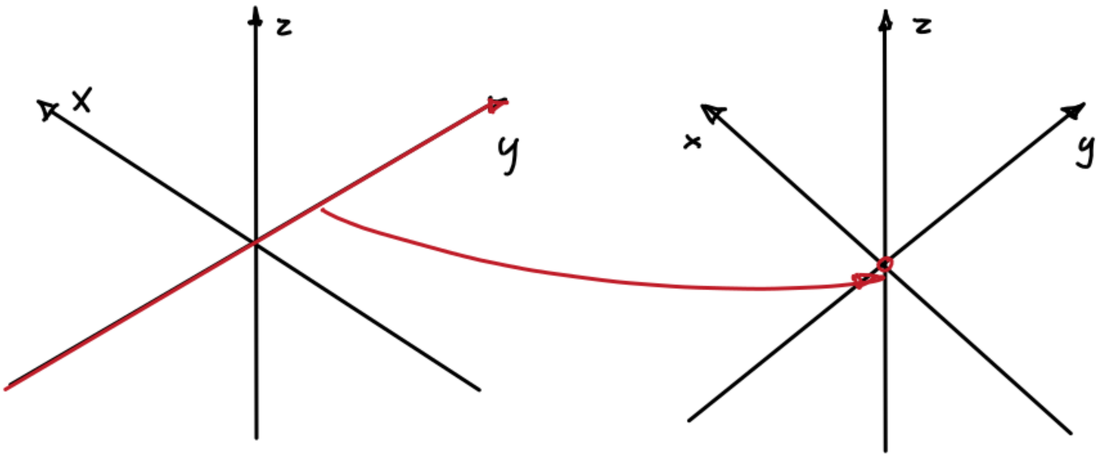


- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (z-x, z-2x, z-3x).$

$$(x,y,z) \in \text{Ker}(T) \iff (z-x, z-2x, z-3x) = (0,0,0) \implies \begin{cases} z-x=0 \\ z-2x=0 \\ z-3x=0 \end{cases}$$

$\therefore x = z = 0$

Logo, $\text{Ker}(T) = \{(x,y,z) : x = z = 0, y \in \mathbb{R}\}$ ■



3. Determinar base para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x+y, 2x+y, 3x+y);$

$(x+y, 2x+y, 3x+y) = (x, 2x, 3x) + (y,y,y) = x(1,2,3) + y(1,1,1)$

Para que $x(1,2,3) + y(1,1,1) = (0,0,0)$, teríamos

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \therefore x = y = 0$$

Logo $B_{\text{Im}} = \{(1,2,3),(1,1,1)\}$ é um conjunto composto por elementos linearmente independentes entre si e base geradora do conjunto imagem $\text{Im}(T)$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, a base do núcleo há de possuir uma base de dimensão 1. Observa-se que para corresponder a definição do núcleo, basta que $x = y = 0, z \in \mathbb{R}$. Assim, satisfaz essa definição a base canônica $B_{\text{Ker}} = \{(0,0,1)\}$. ■

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x,y) = y + 2x$

$$(x, y) = y + 2z \implies (x, y) = x(2) + y(1)$$

Assim obtêm-se as bases (1) e (2) para a imagem, onde (2) é combinação linear de (1) e portanto pode ser descartada. $B_{\text{Im}} = \{(1)\}$.

O núcleo há de ter uma base de duas dimensões, da qual resultam valores de x e y para os quais $T(x, y) = e$. Esta seria $y = -2x$, $(-2, 1)$. Logo, $B_{\text{Ker}} = \{(-2, 1)\}$. ■

- $T : \mathbb{P}_2(t) \to \mathbb{P}_2(t),\ T(p) = p'$;

A base canônica polinomial é $B_{\mathbb{P}_2} = \{t^2, t, 1\}$, ao aplicarmos sobre esta a regra de transformação da função, obtemos a base da imagem $B_{\text{Im}} = \{T(t^2), T(t), T(1)\}$. Logo,

$$\begin{cases} T(t^2) = 2t \\ T(t) = 1 & \therefore B_{\text{Im}} = \{2t, 1\} \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

A base do núcleo é aquela para qual a regra de transformação resulta em 0, ou seja, $B_{\text{ker}} = \{1\}$. ■

- $T : \mathbb{P}_2(t) \to \mathbb{P}_2(t),\ T(p) = p' + p''$

De maneira similar a resolução anterior, temos:

$$\begin{cases} T(t^2) = 2t + 2 \\ T(t) = 1 & \therefore B_{\text{Im}} = \{2(t + 1), 1\} \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

e $B_{\text{ker}} = \{1\}$. ■

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que : $T(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$; $T(1, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $T(1, 1, 1) = (-2, 0, 7)$

> **Teorema do Núcleo e da Imagem**: Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dada uma transformação linear $F : U \to V$, então
>
> $$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im(F)})$$

- Encontre $T(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

$$T(x, y, z) = (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y)$$

- T é sobrejetora? Justifique;

Sim. Para todo $u \in \mathbb{R}^3$ existe um $T(u) \in \mathbb{R}^3$. Demonstração:

$T(u) = T(\underbrace{x, y, z}_{\in \mathbb{R}^3}) = (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y) =$

$$\underbrace{\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}}\underbrace{(2, 3, 1)}_{\in \mathbb{R}^3}}_{\in \mathbb{R}^3} + \underbrace{y(3, -1, 6)}_{idem} + \underbrace{z(-7, -2, 0)}_{idem}$$

- T é injetora? Justifique;

Sim. Para cada valor de u corresponde um único valor de $F(u)$. O que é imediato.

- T e bijetora? Justifique;

Sim, pois é tanto sobrejetora e injetora.

5. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e $\dim(U) > \dim(V)$. Prove que existe um vetor não nulo $u_0 \in U$ tal que $T(u_0) = e$

Dado que a imagem de T é um subconjunto do contradomínio V temos que $\dim(V) \geq \dim(\mathrm{Im}(T))$. No mais, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, sabemos que $\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{T}))$. Mas como $\dim(U) > \dim(V) \geq \dim(\mathrm{Im}(T))$, isso significa que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 1$. O núcleo Ker é o subconjunto aquele para o qual $\mathrm{Ker}(T) = \{u \in U | T(u) = e\}$, se este possui dimensão maior ou igual à 1, isso garante que haja pelo menos uma combinação linear da base de Ker da qual resulte um vetor $u \neq e$ tal que $T(u) = e$. ■