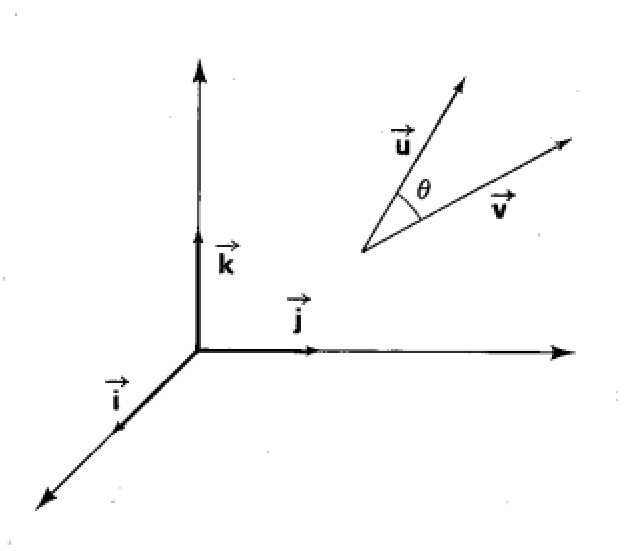
Lista 4 - Matrizes, Vetores e Geometria Analítica

Recapitulação

O produto interno é uma generalização daquilo que nas aulas de Cálculo, na geometria euclidiana, se refere por "produto escalar". Ou seja, para um par de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ onde $\vec{u} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ e $\vec{v} = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$



Definição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Entende-se por produto interno sobre V uma aplicação que transforma cada par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em que um número **real** (que indicaremos por $\langle u, v \rangle$) obedecendo às seguintes condições ($\forall u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$):

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
2. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$;
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
4. $\langle u, u \rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq e$.

O produto interno usual do $\mathbb{R}^n$

Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores genéricos do $\mathbb{R}^n$, então:

1. $\langle u, v \rangle \ = \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle$

$= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$

2. $\langle \alpha u, v\rangle = (\alpha x_1)y_1 + \cdots + (\alpha x_n)y_n$
   $= \alpha(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) = \alpha\langle u, v\rangle$

3. $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + \cdots + y_nx_n$
   $= \langle v, u\rangle$

4. Se $u \neq (0, \ldots, 0)$ então um dos x_i, ao menos, é não nulo. Logo, $\langle u, u\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$

Exercícios

1. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se a função $\langle , \rangle$ é um produto interno no espaço vetorial V:

a.

$V = \mathbb{R}^2, u = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2)$ e $\langle u, w\rangle = 2x_1x_2 + 4y_1y_2$.

- [x] $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

Demonstração

Seja $v = (x_3, y_3)$,

$$\langle u + v, w\rangle = 2(x_1 + x_3)x_2 + 4(y_1 + y_3)y_2$$
$$= 2x_1x_2 + 4y_1y_2 + 2x_1x_3 + 4y_1y_3 = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

- [x] $\langle \alpha u, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração

$$\langle \alpha u, v\rangle = 2(\alpha x_1)x_2 + 4(\alpha y_1)y_2 = \alpha(2x_1x_2 + 4y_1y_2) = \alpha\langle u, w\rangle$$

- [x] $\langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle$

Demonstração

$$\langle u, w\rangle = 2x_1x_2 + 4y_1y_2 = 2x_2x_1 + 4y_2y_1 = \langle w, u\rangle$$

- [x] $\langle u, u\rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq e$.

Demonstração

$$\langle u, u\rangle = 2x_1^2 + 4y_1^2$$

Se $u \neq e$, então pelo menos $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$, logo

$2x_1^2 + 4y_1^2 > 0$ ■

b.

$V = \mathbb{R}^3, u = (x_1, y_1, z_1), w = (x_2, y_2, z_2)$ e $\langle u, w \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$.

- [x] $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Demonstração

Seja $v = (x_3, y_3, z_3)$,

$\langle u + v, w \rangle = (x_1 + x_3)x_2 + (y_1 + y_3)y_2$
$= x_1x_2 + y_1y_2 + x_3x_2 + y_3y_2 = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

- [x] $\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração

$\langle \alpha u, w \rangle = (\alpha x_1)x_2 + (\alpha y_1)y_2 = \alpha(x_1x_2 + y_1y_2) = \alpha \langle u, w \rangle$

- [x] $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$

Demonstração

$\langle u, w \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \langle w, u \rangle$

- [x] $\langle u, u \rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq e$.

Demonstração

$\langle u, u \rangle = x_1^2 + y_1^2$

Se $u \neq e$, então pelo menos $x_1 \neq 0$ ou $y_1 \neq 0$, logo

$x_1^2 + y_1^2 > 0$ ■

c.

$V = \mathbb{R}^4, u = (x_1, y_1, z_1, t_1), w = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ e $\langle u, w \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$
.

- [x] $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Demonstração

Seja $v = (x_3, y_3, z_3, t_3)$,

$\langle u + v, w \rangle = (x_1 + x_3)x_2 + (y_1 + y_3)y_2 + (z_1 + z_3)z_2 - (t_1 + t_3)t_2$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2 + x_3x_2 + y_3y_2 + z_3z_2 - t_3t_2$
$= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

- [x] $\langle \alpha u, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle, \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração

$\langle \alpha u, w\rangle = (\alpha x_1)x_2 + (\alpha y_1)y_2 + (\alpha z_1)z_2 - (\alpha t_1)t_2$
$= \alpha(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2) = \alpha\langle u, w\rangle$

- [x] $\langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle$

Demonstração

$\langle u, w\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$
$= x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 - t_2t_1 = \langle w, u\rangle$

- [ ] $\langle u, u\rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq e$.

Demonstração

$\langle u, u\rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2$

Se $u \neq e$, então pelo menos $x_1 \neq 0$, ou $y_1 \neq 0$, ou $z_1 \neq 0$, ou $t_1 \neq 0$. Entretanto, se $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ e $t_1 \neq 0$, então

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - t_1^2 < 0$ não é produto interno. ■

2. Sejam $X = (1, 1, -2)$ e $Y = (a, -1, 2)$. Para quais valores de a, X e Y são ortogonais?

Dois vetores são ortogonais entre si se estes descrevem entre si um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Assim o sendo, o produto interno entre estes será nulo pois

$$\vec{X} \times \vec{Y} = |\vec{X}||\vec{Y}|\cos\theta = |\vec{X}||\vec{Y}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

No mais, temos pela definição de produto interno que

$$|\vec{X}||\vec{Y}|\cos\theta = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Então, os valores de a para o qual X e Y seriam ortogonais são

$$\langle X, Y\rangle = a - 1 - 4 = 0 \implies a = 5 \blacksquare$$

3. Mostre que se um vetor v é ortogonal a um vetor u, então v também é ortogonal à αu, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $u = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, \ldots, y_n)$. Pela definição de produto interno, se v é ortogonal a u, então

$$\langle u, v\rangle \ = \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

Avaliemos agora o caso $\langle \alpha u, v\rangle$:

$$\langle \alpha u, v\rangle = (\alpha x_1)y_1 + \cdots + (\alpha x_n)y_n = \alpha(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)$$
$$= \alpha \underbrace{\langle u, v\rangle}_{\text{Por hipótese} = 0} = 0$$

Logo, v também é ortogonal à αu. ■

4. Sabendo que $||u|| = 3$, $||v|| = 5$, determine α de tal maneira que $\langle u + \alpha v, u - \alpha v\rangle \ = 0$.

> Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \to \langle u, v\rangle$. Dado um vetor $u \in V$ indica-se por $||u||$ e chama-se *norma de* u o número real positivo dado por
>
> $$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

$$||u|| = 3 \implies \sqrt{\langle u, u\rangle} = 3 \implies \langle u, u\rangle \ = 9$$
$$||v|| = 5 \implies \sqrt{\langle v, v\rangle} = 5 \implies \langle v, v\rangle \ = 25$$

Conforme a Definição 1, itens a à d, e propriedades P descritas por Callioli, et al.[1], temos

$$\langle u + \alpha v, u - \alpha v\rangle = \underbrace{\langle u, u - \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u - \alpha v\rangle}_{(a)} =$$
$$\underbrace{\langle u, u\rangle + \langle u, -\alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle \alpha v, -\alpha v\rangle}_{\mathbf{P}_3} =$$
$$\langle u, u\rangle - \underbrace{\alpha\langle u, v\rangle}_{\mathbf{P}_2} + \underbrace{\alpha\langle v, u\rangle}_{(b)} - \underbrace{(\alpha)^2\langle v, v\rangle}_{\mathbf{P}_2 \ e \ (b)} =$$
$$9 - \alpha\langle u, v\rangle + \alpha\underbrace{\langle u, v\rangle}_{(c)} - 25\alpha^2 =$$
$$9 \cancel{-\alpha\langle u, v\rangle + \alpha\langle u, v\rangle} - 25\alpha^2 = 0$$
$$\implies \alpha = \pm\frac{3}{5} \ ■$$

5. Sejam u e v vetores de um espaço vetorial com norma. Prove que $\langle u, v\rangle = 0$ se, e somente se, $||u + \alpha v|| \geq ||u||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Segundo a definição de norma, temos que $||u|| \geq 0, \forall u \in V$. A norma $||u + \alpha v||$ é a medida de um vetor, tal que, conforme a demonstração da *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*,

$$||u + \alpha v||^2 = \langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle =$$

$\langle u,u\rangle + \langle u,\alpha v\rangle + \langle \alpha v,u\rangle + \langle \alpha v,\alpha v\rangle =$
$||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + \alpha^2||v||^2$

Utilizemos essa igualdade para a prova que buscamos fazer.

$$||u+\alpha v||^2 = ||u||^2 + \underbrace{2\langle u,v\rangle}_{\text{Por hipótese é } = 0} + \alpha^2||v||^2 = \underbrace{||u||^2 + \alpha^2||v||^2}_{\text{Por definição são } \geq 0}$$

$$\therefore ||u+\alpha v||^2 \geq ||u||^2 \implies ||u+\alpha v|| \geq ||u|| \blacksquare$$

6. Sejam $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ e $g(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$ polinômios quaisquer de $P_n(\mathbb{R})$. Verifique se a função

$$\langle f(t), g(t)\rangle \rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ib_i$$

é produto interno no espaço $P_n(\mathbb{R})$.

A aplicação descrita trata-se de um produto interno se as quatro seguintes condições forem verificadas:

1. $\langle f(t)+h(t), g(t)\rangle = \langle f(t), g(t)\rangle + \langle h(t), g(t)\rangle$

Demonstração

Seja $h(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_nt^n$, tem-se:

$$\langle f(t)+h(t), g(t)\rangle = \sum_{i=0}^{n}(a_i+c_i)b_i = \sum_{i=0}^{n}(a_ib_i + c_ib_i) =$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_ib_i + \sum_{i=0}^{n} c_ib_i = \langle f(t), g(t)\rangle + \langle h(t), g(t)\rangle \blacksquare$$

2. $\langle \alpha f(t), g(t)\rangle = \alpha\langle f(t), g(t)\rangle, \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração

$$\langle \alpha f(t), g(t)\rangle = \sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i)b_i = \sum_{i=0}^{n}\alpha(a_ib_i)$$
$$= \alpha\sum_{i=0}^{n} a_ib_i = \alpha\langle f(t), g(t)\rangle \blacksquare$$

3. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

Demonstração

$$\langle f(t), g(t)\rangle \ = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i = \sum_{i=0}^{n} b_i a_i = \langle g(t), f(t)\rangle \blacksquare$$

4. $\langle f(t), f(t)\rangle$ é um número real maior que zero para todo $f(t) \neq 0$

Demonstração

$$\langle f(t), f(t)\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i a_i$$

Se $f(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ então existe pelo menos um $a_i \neq 0$, logo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 > 0 \implies \langle f(t), f(t)\rangle > 0 \blacksquare$$

---

1. CALLIOLI, C.; DOMINGUES, H.; COSTA, R. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. [s.l.] Atual Editora, [s.d.]. ↩