Definição de *Espaço Vetorial*

Todo conjunto $V \neq \emptyset$ definido sobre um campo qualquer $\mathbb{D}$[^1] (por exemplo, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) em que existe:

1. adição $(u, v) \in V \mapsto u + v \in V$
2. e multiplicação $(a, u), a \in \mathbb{R}, u \in V \mapsto au \in V$

com determinados axiomas (8 no total).

I. Propriedades da adição

Para $\forall u, v, w \in V$:

1. Comutação

$$u + v = v + u$$

2. Associação

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

3. Existe um elemento neutro, aqui indicado por e, que não altera o resultado de uma adição ao ser acrescentado nesta

$$\exists\ e \in V \mid u + e = u$$

4. Para todo elemento u existe um *oposto* $(-u)$ tal que:

$$\exists\ (-u) \in V \mid u + (-u) = e$$

II. Propriedades da multiplicação

Para $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$:

1. $a(bu) = (ab)u$
2. $(a + b)u = au + bu$
3. $a(u + v) = au + av$
4. $1u = u$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

As propriedades anteriormente descritas se aplicam a qualquer n-upla de números ordenados:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$$
$$\vdots$$
$$(a_1, \ldots a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n), \forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$$

---

1. Daqui por diante assumiremos $\mathbb{R}$, mas tais propriedades aplicariam-se a qualquer outro campo. ↩