Dependência linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Conjunto linearmente independente (L.I.)

Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, \ldots, u_2\} \subset V$ é *linearmente independente* se e somente se, uma igualdade do tipo

$$a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = e$$

onde $a \in \mathbb{R}$, for possível **somente** quando $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Outro caso possível é quando o conjunto L em questão é nulo ($L = \{\emptyset\}$).

Conjunto linearmente dependente (L.D.)

Quando o conjunto não é nulo e a somatória anteriormente descrita só é possível se $\exists\ a \neq 0$.

Propriedades da dependência linear

P1. Se um conjunto $L \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L. D.

Demonstração: Seja $S = \{e, u_2, \ldots, u_n\}$, então

$$ae + 0u_2 + \cdots + 0u_n = e$$

para todo $a \neq 0$. Isso é suficiente para concluir que S é L. D.[1] ■

P2. Se $L = u$, onde $L \subset V$ e $u \neq e$, então L é L.I.

Demonstração: Se $au = e$, e $u \neq e$, então $a = 0$. ■

P3. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é L.D., então um dos seus vetores é a combinação linear de todos os demais.

Demonstração: por hipótese existem números reais $a_1, \ldots, a_n$ onde pelo menos um é igual a zero. Venhamos a estabelecer que $a_1 \neq 0$ então o inverso de a_1, (a_1^{-1}) existe e:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots a_nu_n = e \implies u_1 = -\frac{a_2u_2 + \cdots + a_nu_n}{a_1} = a_1^{-1}a_2u_2 + \cdots + a_1^{-1}a_nu_n$$

O que mostra que u_1 equivale à combinação linear de $u_2, \ldots, u_n$:

$$u_1 = [S] = \{a_1^{-1}a_2u_2 + \cdots + a_1^{-1}a_nu_n \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}■$$

P4. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D., então S_2 também é L.D.

Demonstração: como nem todos os escalares que figuram em S_1 são nulos, o que configura L.D., e S_2 contém S_1, então o conjunto dos escalares em S_2 também não é inteiramente nulo. ■

P5. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_2 é L.I., então S_2 também é L.I.

Demonstração: situação complementar à aquele da propriedade anterior. ■

P6. Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é L.I, e para um certo $u \in V$ tem-se $S \cup \{u\} = \{u_1, \ldots, u_n, u\}$ L.D., então o vetor u é combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$, isto é, $u \in [S]$.

Demonstração: Por hipótese tem-se uma igualdade

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + au = e$$

onde nem todos os escalares que figuram nela são nulos. Afirmamos que um dos escalares não nulos é o a. De fato, se $a = 0$, então

$$a_1 u_1 + \ldots a_n u_n = e$$

Como porém o conjunto S é L.I., esta última igualdade só seria possível com $a_1 = \cdots = a_n$. Daí, se $a = 0$, então $a = a_1 = \cdots = a_n = 0$, o que contradiz a hipótese.

Já que $a \neq 0$, temos que:

$a_1 u_1 + \ldots a_n u_n + au = e$

$$\implies u = -\frac{a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n}{a} = (a_1 a^{-1}) u_1 + \cdots + (a_n a^{-1}) u_n$$

P7. Se $S = \{u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n\}$ e $u_j \in [S - u_j]$ (isto é, u_j é combinação linear doutros vetores contidos em S), então

$$[S] = [S - \{u_j\}]$$

Demonstração: Faremos a prova supondo $j = 1$, o que nada tira em generalidade. É obvio que $[S - \{u_1\}] \subset [S]$, pois $S - u_1 \subset S$. Como foi dito que u_j é a combinação linear dos demais vetores, aplicando a propriedade **P3**, temos:

$$u_1 = -\frac{a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n}{a_1} = b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n = [S]$$

Onde $b_i = -a_1^{-1} a_i$. Continuando,

$$b_2u_2 + \cdots + b_nu_n = [S - \{u_1\}] \therefore [S - \{u_1\}] = [S]$$