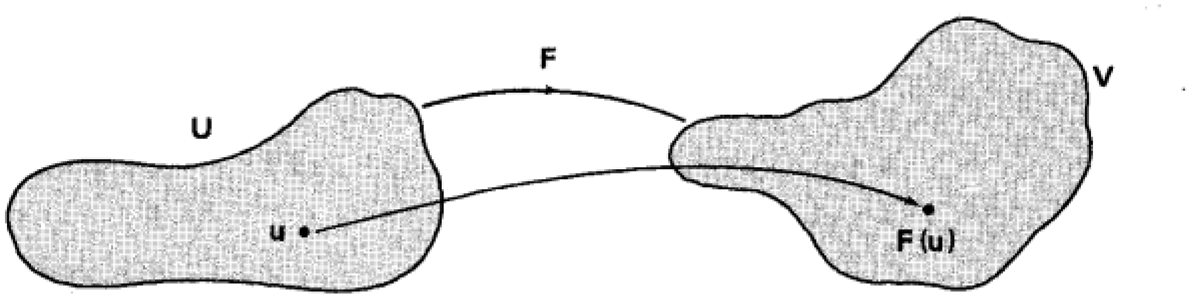
Transformações Lineares

Definição de *aplicação*

Dados dois conjuntos U e V, ambos não vazios, uma *aplicação* de U em V é uma "lei" pela qual a cada elemento de U está associado um único elemento de V. Se F indica essa lei e *u* indica um elemento genérico de U então o elemento associado a u é representado por $F(u)$ (lê-se "F de u") e se denomina *imagem* de u por F.



Também, denomina-se U o *domínio* da função F e V o *contra-domínio* desta. Para indicar que F é uma aplicação de U em V costuma-se escrever

$$F : U \to V$$

ou ainda, indicando por u um elemento genérico de U

$$u \mapsto F(u)$$

Aplicação injetora

Aquela que para cada valor de u corresponde um único valor de $F(u)$.

$$\forall u_1, u_2 \in U, F(u_1) - F(u_2) \iff u_1 = u_2$$

Aplicação sobrejetora

A aplicação $F : U \to V$ que para todo $v \in V$ existe $u \in U$ tal que $F(u) = v$.

Aplicação bijetora

A aplicação que é tanto injetora quanto sobrejetora.

Algumas definições

1. Considerando duas aplicações F e G, se $F(u) = G(u), \forall u \in U$ então $F : U \to V$ é igual à $G : U \to V$.

2. Dado o subconjunto $W \subset U$ denomina-se a *imagem* de W por F $F(W) = \{F(u) : u \in U\}$.

Transformações lineares

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $F : U \to V$ é chamada *transformação linear* de U em V se, e somente se,

1. $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$ e

2. $F(\alpha u) = \alpha F(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in U$.

Propriedades

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Para uma aplicação $F : U \to V$ valem as seguintes propriedades:

P1. $F(e) = e$ (F transforma o vetor nulo de U no vetor nulo de V).

$$\begin{cases} F(e) + e = F(e) \\ F(e) = F(e + e) = F(e) + F(e) \end{cases}$$
$$\therefore F(e) + e = F(e) + F(e) \implies F(e) = e \blacksquare$$

P2. $F(-u) = -F(u), \forall u \in U$

P3. $F(u_1 - u_2) = F(u_1) - F(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$

P4. Se W é um subespaço de U, então a imagem de W por F é um subespaço de V.[1]

P5. Sendo $F : U \to V$ linear, então

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(u_i)$$

Algumas definições

1. No caso em que $U = V$, uma transformação linear é chamada também de *operador linear* ou *idêntico*.

2. Nos casos em que $F : U \to V$ e $F(u) = e$, denomina-se a *transformação linear nula* de U para V.

3. Seja $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definida por $D(f(t)) = f'(t)$ para todo polinômio $f(t)$ de $P_n(\mathbb{R})$ (onde $f'(t)$ é a derivada de $f(t)$).

Sabe-se pela disciplina de Cálculo que a derivada da soma de dois polinômios é igual a soma das derivadas e a derivada do produto de um polinômio por um número é igual ao produto deste número pela derivada do polinômio. Então a função de derivação é mais um exemplo de transformação linear.

---

1. Isso é verificável aplicando as propriedades do subespaço anteriormente expostas para $F(W)$. ↩