Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Planos tangentes

Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplo

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Resolução

Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$f_x(x, y) = 4x \implies f_x(1, 1) = 4$
$f_y(x, y) = 2y \implies f_y(1, 1) = 2$

Portanto, temos a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \implies z = 4x + 2y - 3 \blacksquare$$

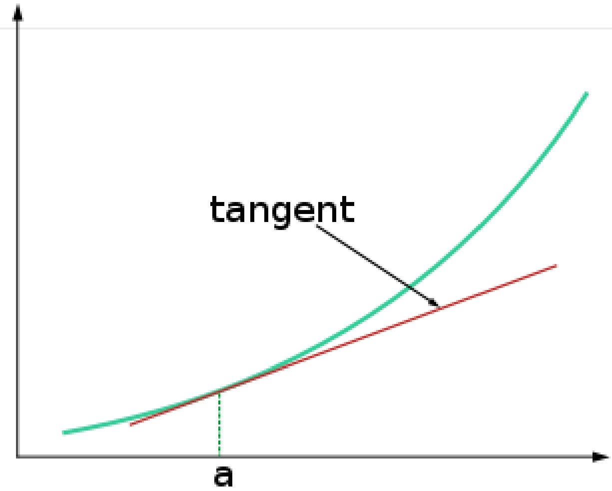
Aproximações lineares

Para funções de uma única variável

Dada uma função $f(x)$ contínua e uma variável real x cujo valor é próximo de uma constante a, temos:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Tal qual ilustra o seguinte gráfico:



Ou seja para valores próximos de a, a curva descrita pela função $f(x)$ se aproxima de uma reta que contém o valor a. Desta forma, é possível utilizar uma função afim $L(x)$ de maneira a obter uma aproximação da função geral $f(x)$, tal que $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \approx f(x)$. Onde $L(x)$ é denominada a **linearização** de f no ponto a.

Exemplo

Calculemos o valor aproximado de $\sqrt[3]{25}$.

Resolução

1. Seja $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, o problema consiste em encontrar o valor de $f(25)$.

2. Precisamos de um valor próximo de 25, do qual saibamos qual é a raiz cúbica. Sabemos que $f(27) = 3$, então usemos $a = 27$.

3. Derivando $f(x)$ e encontrando o valor de $f'(a)$:

$$f'(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \implies f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

4. Usando a aproximação linear:

$$f(25) \approx f(27) + f'(27)(25 - 27) = 3 - \frac{2}{27} \approx 2,926$$

5. O resultado 2,926 é um valor bem próximo, e portanto uma boa aproximação, do valor real 2,924.

Para funções com duas variáveis

O mesmo procedimento pode ser realizado uma função com duas variáveis $f(x, y)$ fazendo uso de suas derivadas parciais de x e y: f_x e f_y. Tal que chegamos na seguinte fórmula:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \approx f(x, y)$$

Onde a e b são constantes tais que $x \approx a$ e $y \approx b$.

Para funções com três ou mais variáveis

De forma análoga, temos:

$$L(x, y, z) = f(a, b) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) \\ + f_z(a, b, c)(z - c) \approx f(x, y, z)$$

E assim por diante.

Diferenciabilidade

Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) de Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde tanto ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

Ou seja, uma função é diferenciável se, e somente se, sua aproximação linear fornece uma boa aproximação para $f(x, y)$ para valores próximos de $f(a, b)$.

Teorema

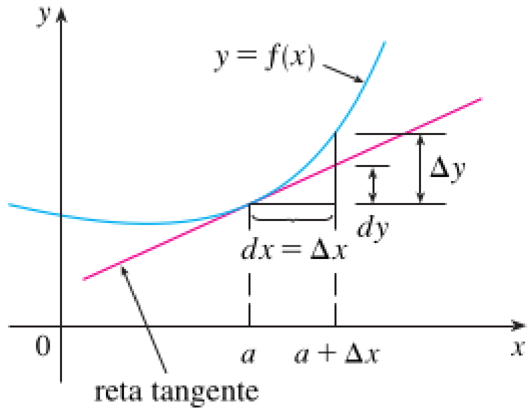
Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Diferenciais

Para funções de uma única variável

Para uma função de uma única variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer qualquer número real. A diferencial de y é definida como

$$dy = f'(x)\ dx$$



Para funções de duas variáveis

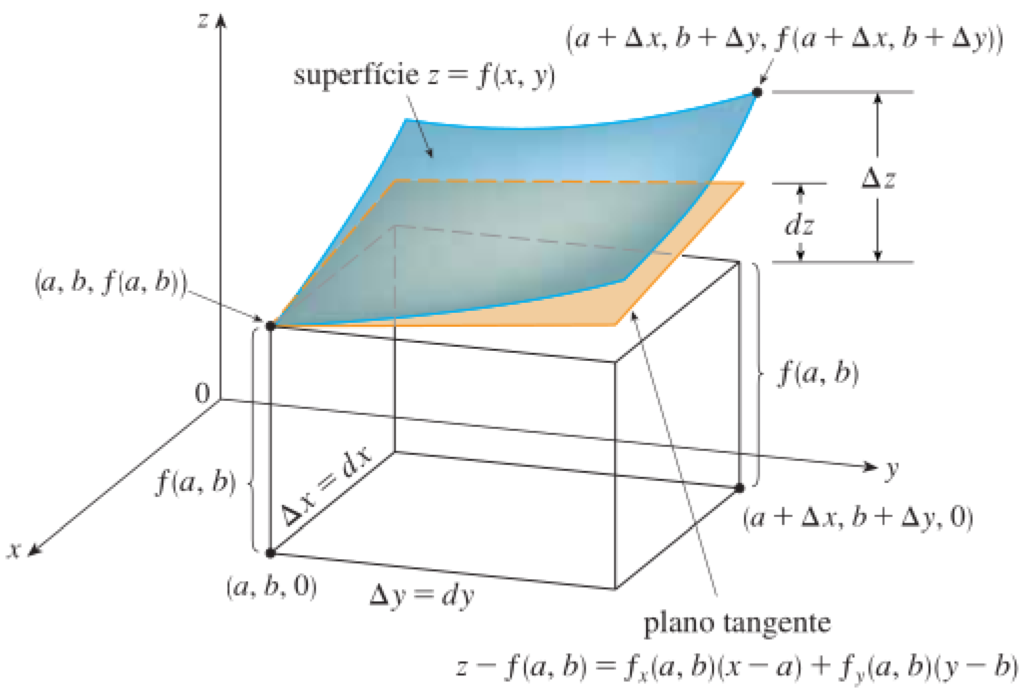
Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as diferenciais dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a diferencial dz também chamada de **diferenciação total**, é definida por

$$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Algumas vezes a notação utilizada para a diferenciação total é df.

E assim, com a notação diferencial, a aproximação linear pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$



Para funções de três variáveis

Analogamente,

$$dw = yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz = \frac{\partial w}{\partial x}\ dx + \frac{\partial w}{\partial y}\ dy + \frac{\partial w}{\partial z}\ dz$$