Enumeração e Combinatória

Técnicas de contagem de objetos com determinadas propriedades.

Princípios básicos

Dados dois eventos A e B disjuntos, se

- o evento A pode ocorrer de n maneiras diferentes e
- o evento B pode ocorrer de m maneiras diferentes,

Regra da soma: então o evento $A\ ou\ B$ pode ocorrer de $n + m$ maneiras diferentes ($|A \cup B| = |A| + |B|$).

Regra do produto: então o evento $A\ e\ B$ pode ocorrer de nm maneiras diferentes ($|A \times B| = |A||B|$).

Permutações

Arranjos de objetos em que a ordem destes é significativa.

r-permutações

Dado um conjunto de elementos de tamanho n, denomina-se r-permutação de n objetos o conjunto de combinações possíveis com um subconjunto de $r \leq n$ objetos.

Por exemplo, duas possíveis 3-permutações das 4 letras A, B, C, D são ACB e DBC.

Teorema

O número de r-permutações de n objetos é dado por

$$P(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Corolário

O número de permutações de n objetos é dado por $P(n, n) = n!$. Neste caso escreve-se simplesmente $P(n)$ ou P_n.

Permutações com repetições

Quando alguns dos objetos a serem permutados são idênticos, temos de considerar uma redução no número de permutações distintas.

Teorema

O número $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l, \theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots)$ de permutações de n objetos onde todos α , β, e θ são idênticos com quaisquer outros α, β e θ respectivamente, é:

$$P^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_l,\theta_1,\ldots,\theta_m,\ldots}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\beta_1+\cdots+\beta_l+\theta_1+\cdots+\theta_m+\ldots} = \frac{(\alpha+\beta+\theta+\ldots)!}{\alpha!\beta!\theta!\ldots!}$$

Também denotado enquanto número **multinomial**:

$$\binom{n!}{n_1! \quad n_2! \quad n_3! \quad n_4! \quad n_5!}$$

Permutações com reposição

O número de r-permutações de n objetos diferentes que podem ser repostos ou, equivalentemente, que existem em quantidade ilimitada é dado, pela regra do produto, por

$$U(n,r) = n^r$$

Combinações

Seleção de objetos de um arranjo no qual a ordem não é significativa.

Teorema

O número de combinações de r objetos de um arranjo de n objetos é dado por

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Coeficientes binomiais

O número $C_{(n,r)}$ possui um símbolo especial para ele que é

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

denominado "coeficiente binomial". Onde

- $C_{(n,0)} = \binom{n}{0} = 1$;

- $C_{(n,r)} = \binom{n}{r} = 0$ se $r < 0$ ou $r > n$;
- $C_{(n,r)} = \binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$;
- $C_{(-n,-r)} = \binom{-n}{-r} = (-1)^{n+r} \binom{r-1}{n-1}$[^1]
- $C_{(n,r)} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = C_{(n,n-r)}$
- $C_{(n+1,r)} = \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = C_{(n,r)} + C_{(n,r-1)}$

Combinações com repetições

O conjunto $R(n,k)$ de k combinações de n objetos distintos os quais podem ocorrer cada qual até k vezes e somados totalizam k itens.

Método de Euler

Trata-se de um método para calcular o número de combinações distintas com repetições mapeando-as a elementos de um arranjo sem repetições.

Considere uma sequência de 4 elementos numerados de 1 à 4, onde busca-se compor uma combinação de 5 elementos. Ordenada em ordem crescente, uma combinação possível com repetição seria $C = \{1,2,2,2,4\}$. Criemos um arranjo A de igual tamanho à partir deste conjunto, aplicando a regra de transformação $a_i = c_i + i - 1$. Teremos como resultado $A = \{1,2,4,5,8\}$, um arranjo sem repetição de elementos, mais correspondente a uma combinação onde há repetições.

À partir dai, podemos calcular pelo binômio de Newton o número de arranjos distintos:

$$R(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

Como a regra de transformação é bijetora (produz valores a_i distintos para cada valor c_i também distinto), tem-se que este binômio é representativo da variedade de combinações possíveis.

Método "bolas e barras"

Em uma k-combinação de n itens com repetição, temos x_1 elementos do tipo 1, x_2 elementos do tipo 2, etc. Tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

O número de k-combinações de n itens com repetição é dado, portanto, pelo número de soluções de soluções para a equação acima, sendo que $x_i \geq 0$.

O método de bolas e barras consiste em uma ilustração que representa unidades enquanto bolas e a distinção entre elementos enquanto barras:

$$\underbrace{\circ\circ\circ}_{x_1}|\underbrace{\circ}_{x_2}||\underbrace{\circ\circ}_{x_3}|\dots|\underbrace{\circ}_{x_n}$$

Pelo desenho observa-se que existem k bolas e $n-1$ barras cujas posições são transponíveis entre si. Assim, cada solução para a equação $x_1 + \dots x_n = k$ pode corresponder a uma configuração das bolas e barras. Ou seja, temos de escolher onde colocar $n-1$ barras dentre $n-1+k$ posições possíveis. Esse número nada mais é que o número de seleções de $n-1$ itens de um total de $n-1+k$ itens sem repetição:

$$R(n,k) = \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

---

1. Verificar este resultado. "Livro do Knauf" ↩