

Enumeração e Combinatória

Técnicas de contagem de objetos com determinadas propriedades.

Princípios básicos

Dados dois eventos A e B disjuntos, se

- o evento A pode ocorrer de n maneiras diferentes e
- o evento B pode ocorrer de m maneiras diferentes,

Regra da soma: então o evento A ou B pode ocorrer de $n + m$ maneiras diferentes ($|A \cup B| = |A| + |B|$).

Regra do produto: então o evento A e B pode ocorrer de nm maneiras diferentes ($|A \times B| = |A||B|$).

Permutações

Arranjos de objetos em que a ordem destes é significativa.

r-permutações

Dado um conjunto de elementos de tamanho n , denomina-se r -permutação de n objetos o conjunto de combinações possíveis com um subconjunto de $r \leq n$ objetos.

Por exemplo, duas possíveis 3-permutações das 4 letras A, B, C, D são ACB e DBC.

Teorema

O número de r -permutações de n objetos é dado por

$$P(n, r) = n(n - 1) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Corolário

O número de permutações de n objetos é dado por $P(n, n) = n!$. Neste caso escreve-se simplesmente $P(n)$ ou P_n .

Permutações com repetições

Quando alguns dos objetos a serem permutados são idênticos, temos de considerar uma redução no número de permutações distintas.

Teorema

O número $P(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l, \theta_1, \dots, \theta_m, \dots)$ de permutações de n objetos onde todos α , β , e θ são idênticos com quaisquer outros α , β e θ respectivamente, é:

$$P_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \dots + \beta_l + \theta_1 + \dots + \theta_m + \dots}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l, \theta_1, \dots, \theta_m, \dots} = \frac{(\alpha + \beta + \theta + \dots)!}{\alpha! \beta! \theta! \dots!}$$

Também denotado enquanto número **multinomial**:

$$\binom{n!}{n_1! \ n_2! \ n_3! \ n_4! \ n_5!}$$

Permutações com reposição

O número de r -permutações de n objetos diferentes que podem ser repostos ou, equivalentemente, que existem em quantidade ilimitada é dado, pela regra do produto, por

$$U(n, r) = n^r$$

Combinações

Seleção de objetos de um arranjo no qual a ordem não é significativa.

Teorema

O número de combinações de r objetos de um arranjo de n objetos é dado por

$$C(n, r) = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Coefficientes binomiais

O número $C_{(n,r)}$ possui um símbolo especial para ele que é

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

denominado "coeficiente binomial". Onde

- $C_{(n,0)} = \binom{n}{0} = 1;$

- $C_{(n,r)} = \binom{n}{r} = 0$ se $r < 0$ ou $r > n$;
- $C_{(n,r)} = \binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$;
- $C_{(-n,-r)} = \binom{-n}{-r} = (-1)^{n+r} \binom{r-1}{n-1}$ [1]
- $C_{(n,r)} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = C_{(n,n-r)}$
- $C_{(n+1,r)} = \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = C_{(n,r)} + C_{(n,r-1)}$

Combinações com repetições

O conjunto $R(n, k)$ de k combinações de n objetos distintos os quais podem ocorrer cada qual até k vezes e somados totalizam k itens.

Método de Euler

Trata-se de um método para calcular o número de combinações distintas com repetições mapeando-as a elementos de um arranjo sem repetições.

Considere uma sequência de 4 elementos numerados de 1 à 4, onde busca-se compor uma combinação de 5 elementos. Ordenada em ordem crescente, uma combinação possível com repetição seria $C = \{1, 2, 2, 2, 4\}$. Criemos um arranjo A de igual tamanho à partir deste conjunto, aplicando a regra de transformação $a_i = c_i + i - 1$. Teremos como resultado $A = \{1, 2, 4, 5, 8\}$, um arranjo sem repetição de elementos, mais correspondente a uma combinação onde há repetições.

À partir daí, podemos calcular pelo binômio de Newton o número de arranjos distintos:

$$R(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}$$

Como a regra de transformação é bijetora (produz valores a_i distintos para cada valor c_i também distinto), tem-se que este binômio é representativo da variedade de combinações possíveis.

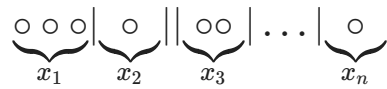
Método "bolas e barras"

Em uma k -combinação de n itens com repetição, temos x_1 elementos do tipo 1, x_2 elementos do tipo 2, etc. Tal que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

O número de k -combinações de n itens com repetição é dado, portanto, pelo número de soluções de soluções para a equação acima, sendo que $x_i \geq 0$.

O método de bolas e barras consiste em uma ilustração que representa unidades enquanto bolas e a distinção entre elementos enquanto barras:



Pelo desenho observa-se que existem k bolas e $n - 1$ barras cujas posições são transponíveis entre si. Assim, cada solução para a equação $x_1 + \dots + x_n = k$ pode corresponder a uma configuração das bolas e barras. Ou seja, temos de escolher onde colocar $n - 1$ barras dentre $n - 1 + k$ posições possíveis. Esse número nada mais é que o número de seleções de $n - 1$ itens de um total de $n - 1 + k$ itens sem repetição:

$$R(n, k) = \binom{n - 1 + k}{n - 1} = \binom{n + k - 1}{k}$$

1. Verificar este resultado. "Livro do Knauf"