Propriedades do Espaço Vetorial

Admitindo $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$,

P1

$ae = e$

Prova: Dados os axiomas I-3, I-4 e II-3 e da definição de espaço vetorial, têm-se:

$$
\begin{aligned}
&ae = a(e) = \overbrace{a\underbrace{(e+e)}_{\text{I-3}}}^{\text{II-3}} = ae + ae \\
&\implies \underbrace{ae + e}_{\text{I-3}} = ae + ae \\
&\implies ae + ae + (-ae) = ae + ae \\
&\implies ae + (-ae) = ae + ae + (-ae) \\
&\implies \overbrace{e = \underbrace{ae + \cancel{e}}_{I-3}}^{I-4}
\end{aligned}
$$

P2

$0u = e$

Prova: $0u = u(0+0) = 0u + 0u \implies 0u + (-0u) = 0u + 0u + (-0u) \implies e = 0u + \cancel{e}$

P3

$au = e \iff a = 0 \lor u = e.$

Prova: Suponhamos que $a \neq 0$, daí existe o número real a^{-1}. Assim, temos:

$$au = e \implies \frac{au}{a} = \frac{e}{a}$$

Aplicando-se os axiomas II-1, II-4 e a propriedade 1:

$$\underbrace{\frac{au}{a} = \left(\frac{a}{a}\right)u}_{\text{II-1}} = \underbrace{1u = u}_{\text{II-4}}$$

$$\frac{e}{a} = \underbrace{a^{-1}e = e}_{\text{P1}}$$

$$\therefore u = e$$

P4

$(-a)u = a(-u) = -(au)$

Prova: Aplicando-se o axioma I-4 e a propriedade 2, temos:

$$\begin{aligned}
&(au) + (-au) = e \\
&\implies au + (-au) = au + (-a)u \\
&\implies au + (-au) + (-au) = au + (-a)u + (-au) \\
&\implies (-au) + e = (-a)u + e \\
&\implies (-au) = (-a)u
\end{aligned}$$

E um raciocínio análogo demonstrará que $a(-u) = -(au)$.

P5

$(a - b)u = au - bu$

Prova: $(a-b)u = (a + (-b))u = au + (-bu) = au - bu$

P6

$b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(ba_i)u_i$

Prova: Faz-se por indução a partir dos axiomas II-1 e II-3.

P7

O vetor nulo (e) de qualquer espaço vetorial V é único.

Prova: digamos que, sei lá, existe g que, tal qual e, satisfaz a propriedade I-3

$$\exists\, e \in V \mid u + e = u$$

Assim, $e = e + u = u + g = g \implies e = g$.

P8

Para cada vetor u de um espaço vetorial V existe um único vetor $(-u)$ oposto de u.

Prova: Digamos que existe g tal que $u + g = e$. Daí então,

$$-u = -u + e = -u + (u + g) = (-u + u) + g = e + g = g$$

P9

Para cada $u \in V$ tem-se $-(-u) = u$.

Prova: $u + (-u) = e \implies u = -(-u) + e \implies u = -(-u)$

P10

$u + v = u + w \iff v = w$

Prova:

$$\begin{gathered}(-u) + (u + v) = (-u) + (u + w) \implies ((-u) + u) + v = (-u) + (u + w) \\ e + v = e + w \\ v = w\end{gathered}$$

P11

Existe um único vetor v tal que $u + v = w$.

Prova:

$(-u) + u + v = (-u) + w \implies e + v = w + (-u) \implies v = w + (-u)$