

Algèbre 1 - TD 1

NON CORRIGÉ

Timéo Pochin

September 23, 2021

Exercice 1

1)

$$\begin{aligned} & \neg(P \wedge \neg Q) \\ \iff & \neg P \vee Q \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \neg(P \wedge (Q \wedge R)) \\ \iff & \neg(P \wedge Q \wedge R) \\ \iff & \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & \neg(P \vee (Q \wedge R)) \\ \iff & \neg P \wedge \neg(Q \wedge R) \\ \iff & \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R) \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} & \neg((P \wedge Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)) \\ \iff & P \wedge Q \wedge \neg(R \Rightarrow S) \\ \iff & P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \end{aligned}$$

Exercise 2

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \Leftrightarrow \neg Q$
F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	V	V	F	F	V

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$
F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V

P	Q	R	$R \Rightarrow P$	$R \Rightarrow Q$	$(R \Rightarrow P) \Leftrightarrow (R \Rightarrow Q)$
F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V

P	Q	R	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \Leftrightarrow (Q \wedge R)$
F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V

P	Q	R	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee R)$
F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V

Exercise 3

1)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V

2)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V

Exercise 4

1)

$$\begin{aligned}
 & (P \wedge Q) \Rightarrow P \\
 \Leftrightarrow & \neg(P \wedge Q) \vee P \\
 \Leftrightarrow & \neg P \vee \neg Q \vee P \\
 \Leftrightarrow & \text{Vrai} \vee \neg Q \\
 \Leftrightarrow & \text{Vrai}
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 & \left((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \right) \\
 \Leftrightarrow & \left((\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \right) \\
 \Leftrightarrow & (\neg P \vee \neg Q \vee R \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R) \\
 \Leftrightarrow & \text{Vrai}
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & \left(((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \right) \\ \Leftrightarrow & \left((\neg(P \wedge Q) \vee R) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \right) \\ \Leftrightarrow & ((\neg P \vee \neg Q \vee R) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R)) \\ \Leftrightarrow & \text{Vrai} \end{aligned}$$

Exercice 5

1)

Faux

2)

Vrai

3)

Faux

Exercice 6

1)

Il existe un triangle rectangle qui ne possède pas un angle droit.

2)

Il existe une maison où au moins un enfant n'aime pas ses deux parents.

3)

Il existe un entier x tel que, pour tout entier y , pour tout entier z , la relation $z \geq x + 1$ implique la relation $z \geq y$.

4)

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad |5x - 7| \geq \epsilon \Rightarrow \left| x - \frac{7}{5} \right| \geq \alpha$$

Exercice 7

1)

$$\forall n \in \mathbb{R}^+, \quad \exists a \in \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}, \quad a \in A$$

2)

$$\{0\}$$

3)

$$\{1\}$$

Exercice 8

1)

Pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel p tel que, n est plus petit ou égal à p .

Il existe un entier naturel n tel que, pour tout entier naturel p , n est plus grand que p .

2)

Pour tout entier naturel p , pour tout entier négatif n , p est plus grand ou égal à n .

Il existe un entier naturel p et un entier négatif n tel que, p est plus petit que n .