

Mécanique du point - TD 1

NON CORRIGÉ

Timéo Pochin

September 27, 2021

Exercice 1

a)

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= -3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 3\vec{e}_z\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{v} \wedge \vec{u} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \\ 1 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 3\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + 3\vec{e}_z\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ &= 32\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot -3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot -3 \\ &= 0\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{155}\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 9 - 8 \cdot -3 \\ 7 \cdot -3 - 9 \cdot -3 \\ -3 \cdot 8 - 7 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 78 \\ 6 \\ -66 \end{pmatrix} \\ &= 78\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 66\vec{e}_z\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \\ 7 \cdot 6 - 4 \cdot 9 \\ 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot -3 - 6 \cdot 3 \\ -3 \cdot 3 - 1 \cdot -3 \\ 1 \cdot 6 - -3 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= -24\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + 12\vec{e}_z\end{aligned}$$

Exercise 2

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_y(v_x w_y - v_y w_x) - u_z(v_z w_x - v_x w_z) \\ u_z(v_y w_z - v_z w_y) - u_x(v_x w_y - v_y w_x) \\ u_x(v_z w_x - v_x w_z) - u_y(v_y w_z - v_z w_y) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_y v_x w_y - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x + u_z v_x w_z \\ u_z v_y w_z - u_z v_z w_y - u_x v_x w_y + u_x v_y w_x \\ u_x v_z w_x - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z + u_y v_z w_y \end{pmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} &= \left(\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \\
 &= (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)v_x \\ (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)v_y \\ (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)w_x \\ (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)w_y \\ (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)w_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_x w_y + u_z v_x w_z \\ u_x v_y w_x + u_y v_y w_y + u_z v_y w_z \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y + u_z v_z w_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_y w_x + u_z v_z w_x \\ u_x v_x w_y + u_y v_y w_y + u_z v_z w_y \\ u_x v_x w_z + u_y v_y w_z + u_z v_z w_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_x w_y + u_z v_x w_z - (u_x v_x w_x + u_y v_y w_x + u_z v_z w_x) \\ u_x v_y w_x + u_y v_y w_y + u_z v_y w_z - (u_x v_x w_y + u_y v_y w_y + u_z v_z w_y) \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y + u_z v_z w_z - (u_x v_x w_z + u_y v_y w_z + u_z v_z w_z) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_x w_y + u_z v_x w_z - u_x v_x w_x - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x \\ u_x v_y w_x + u_y v_y w_y + u_z v_y w_z - u_x v_x w_y - u_y v_y w_y - u_z v_z w_y \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y + u_z v_z w_z - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z - u_z v_z w_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cancel{u_x v_x w_x} + u_y v_x w_y + u_z v_x w_z - \cancel{u_x v_x w_x} - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x \\ u_x v_y w_x + \cancel{u_y v_y w_y} + u_z v_y w_z - u_x v_x w_y - \cancel{u_y v_y w_y} - u_z v_z w_y \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y + \cancel{u_z v_z w_z} - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z - \cancel{u_z v_z w_z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_y v_x w_y - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x + u_z v_x w_z \\ u_z v_y w_z - u_z v_z w_y - u_x v_x w_y + u_x v_y w_x \\ u_x v_z w_x - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z + u_y v_z w_y \end{pmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Ligne (1) est égale à ligne (2) donc $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$