Exercise 4 (non-corrigé)

Soit $G(S, A)$ un graphe non-orienté de degré minimum k, montrons qu'il contient une chaîne élémentaire de longeur k :

Prenons une arête $a_1 \in A$ et les deux sommets $(s_0, s_1) \in S^2$ à ses extrimitées. Si $k = 1$ alors la chaîne élémentaire (a_1) est de longeur k.

Si $k > 1$, supposons que $(a_1, \ldots, a_n)$ et $\{s_0, \ldots, s_n\}$ soit une chaîne élémentaire et ses sommets correspondants, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \leq k$.

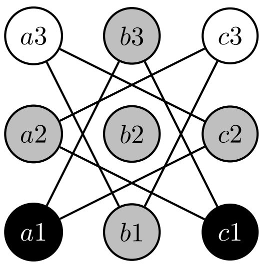
Si $n = k$ alors la chaîne élémentaire $(a_1, \ldots, a_n)$ est de longeur k.

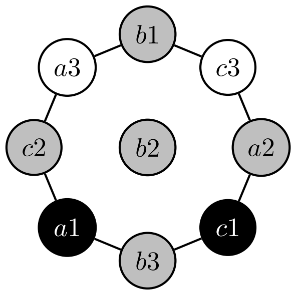
Dans le cas où $n < k$, nous savons que s_n a au moins k arêtes et au plus n arêtes qui le relie aux sommets $\{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$. Donc s_n a au moins $k - n \geq 1$ arêtes qui ne le relie pas aux sommets $\{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$.

Prenons une de ces arêtes a_{n+1}, nous pouvons maintenant constater qu'il existe une chaîne élémentaire $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ de longeur $n + 1$.

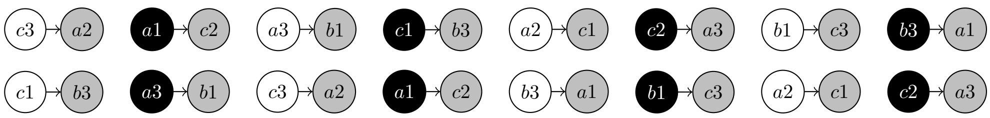
Nous avons montré qu'il existe une chaîne élémentaire de longeur k si $k = 1$. Nous avons également montré que s'il existe une chaîne élémentaire de longeur $n < k$ alors il existe une chaîne élémentaire de longeur $n + 1$. Par récurrence, nous avons montré qu'il existe une chaîne élémentaire de longeur k contenu dans tout graphe $G(S, A)$ de degré minimum k.

Exercise 6 (non-corrigé)





Les blancs commence et les deux couleur joue à tour de rôle, une des solutions pour que les cavaliers blancs et noirs échangent de place est :



Exercise 7 (non-corrigé)

Soit $G(S, A)$ un graphe non orienté de n sommets et m arêtes, montrons que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ alors G est connexe :

Supposons que G n'est pas connexe, alors il existe deux sous-graphes non-nul de G, $G'(S', A')$ et $G''(S'', A'')$ tel que $S'' = S \setminus S'$ et $\forall a \in A,\ a \in A' \cup A''$, notons aussi leurs nombres de sommets et d'arêtes n', m', n'' et m'' respectivement.

Les nombres d'arêtes maximaux de ces graphes correspondent au cas où ils sont complets :

$$\begin{aligned} m'_{\max} &= \frac{1}{2}n'(n'-1) \\ m''_{\max} &= \frac{1}{2}n''(n''-1) \\ &= \frac{1}{2}(n-n')(n-n'-1) \qquad \text{car } n'' = n - n' \end{aligned}$$

Trouvons $(m' + m'')_{\max}$:

$$\begin{aligned} \text{Posons} \qquad f(n, n') &= m'_{\max} + m''_{\max} \\ &= \frac{1}{2}n'(n'-1) + \frac{1}{2}(n-n')(n-n'-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(n'^2 - n'\right) + \frac{1}{2}\left(n'^2 - 2nn' + n' + n^2 - n\right) \\ &= \frac{1}{2}n'^2 - \cancel{\frac{1}{2}n'} + \frac{1}{2}n'^2 - nn' + \cancel{\frac{1}{2}n'} + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) \\ &= n'^2 - nn' + \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) \end{aligned}$$

Calculons la dérivée partielle de f en n'

$$\frac{\partial f}{\partial n'} = 2n' - n$$

elle s'annule quand $n' = \frac{1}{2}n$.

Dans le cas où $n' < \frac{1}{2}n$, la dérivée est négative, f est décroissante et donc $(m' + m'')$ est le plus grand quand $n' = 1$.

Dans le cas où $n' > \frac{1}{2}n$, la dérivée est positive, f est croissante et donc $(m' + m'')$ est le plus grand quand $n' = n - 1$, or ce cas n'est q'un simple inversement de n' et n''.

Nous savons maintenant que

$$\begin{aligned} (m' + m'')_{\max} &= \frac{1}{2}(1)(1-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-1-1) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

Reprenons le graphe G dans le cas où il a un nombre d'arêtes $m > (m' + m'')_{\max}$. Nous pouvons en déduire qu'il existe une arête $a \in A$ tel que $a \notin A' \cup A''$, ceci et une contradiction avec le fait que $\forall a \in A,\ a \in A' \cup A''$.

Par <u>contradiction</u>, nous avons montré que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ alors G est connexe.

Exercise 8 (non-corrigé)

Soit $G(S, A)$ un groupe, montrons que au moins un des deux groupe G et $\bar{G}(S, \bar{A})$ est connexe :

Supposons que G n'est pas connexe.

Soit $s_0 \in S$, pour tout $s \in S$ nous pouvons le placer dans un des deux ensemble suivant :

— l'ensemble des sommets qui sont relié à s_0 par une chaîne de G, appelons le $S_{\text{relié}}$

— l'ensemble des sommets qui ne peuvent pas être relié à s_0 par une chaîne de G, appelons le $S_{\text{non-relié}}$

Regardons maintenant $\bar{G}$, Aucune des arêtes $(i, j) \in S_{\text{relié}} \times S_{\text{non-relié}}$ n'appartient à A, donc elles appartiennes toute à $\bar{A}$.

Soit $s_1 \in S_{\text{non-relié}}$, pour tout $s \in S$, si $s \in S_{\text{non-relié}}$ alors la chaîne $((s_0, s))$ de $\bar{G}$ relie s_0 et s ; si $s \in S_{\text{relié}}$ alors la chaîne $((s_0, s_1), (s, s_1))$ de $\bar{G}$ relie s_0 et s.

Nous pouvons trouver une chaîne de $\bar{G}$ qui relie s_0 avec chaqun des autre sommet donc $\bar{G}$ et connexe.

Supposons maintenant que $\bar{G}$ n'est pas connexe : avec le même raisonnement nous pouvons montrer que $\bar{\bar{G}}$ et connexe, or $\bar{\bar{G}} = G$ donc G est connexe.

Par <u>séparation des cas</u> et <u>implication</u>, nous avons montré que au moins un des deux groupe G et $\bar{G}$ est connexe.