

Física Nuclear I

Física Nuclear y subnuclear

4 de abril de 2024

Curas radiactivas

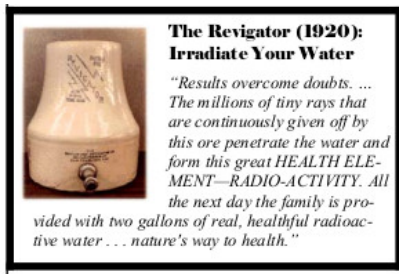


Figura: El revigator, un envase de radón (1912) que es un emisor α , tomado del nerdling zine

"Radioactivity prevents insanity, rouses noble emotions, retards old age, and creates a splendid youthful joyous life."

Radiación en mi pantalón

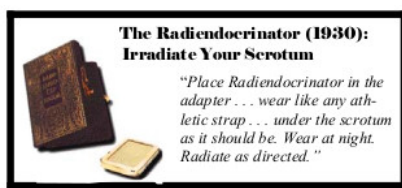
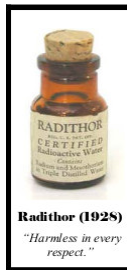


Figura: Radioendocrinator (1930), tomado del nerdling zine

POr solo 150 dólares, *"which have so masterful a control over life and bodily health."*

Una larga vida



Radithor (1928)

"Harmless in every respect."

Figura: Radithor (1928), tomado del nerdling zine

William J. Bailey, aseguraba $1\mu Ci$ de radio. Presumía haber bebido más agua irradiada que cualquier otro ser humano, murió en 1949 a los 64 años de cancer de vejiga.

Prohibición

- Tras la muerte de Byers se prohibieron estos productos
- Aún en los 50s y 60s muchos de ellos se vendían, barra de uranio para aliviar dolores o base de cigarrillos de radio
- En los 80s los deodorizadores sin fin para refrigeradores con Th radiactivo
- Aún se vende en Japón

Masa del núcleo

$M(^AX^Z) = M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n$ Experimentalmente aparece menos masa

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n$$

Energía de enlace y masa

¿Qué signo tiene la energía de enlace?

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + B.E.$$

¿Cuándo es más ligado el núcleo? ¿Cómo se vería para un núcleo inestable?

Un término útil

$$\frac{B}{A} = \frac{B.E.}{A} = \frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A}$$



Exceso de masa

Un valor listado en tablas

$$\delta(A, Z) = [M(Z, A)[uma] - A]keV/c^2 \quad c^2$$

La masa

$$M(Z, A) = \delta(A, Z) + A[uma \rightarrow keV/c^2]$$

Energía de enlace en términos de excesos de masa

$$\begin{aligned}
 B.E. &= Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z) \\
 &= Z(\delta(1, 1) + 1) + (A - Z)(\delta(1, 0) + 1) - (\delta(A, Z) + A) \\
 &= Z\delta(1, 1) + Z + A\delta(1, 0) + A - Z\delta(1, 0) - Z - \delta(A, Z) - A \\
 &= Z\delta(1, 1) + (A - Z)\delta(1, 0) - \delta(A, Z)
 \end{aligned}$$

Ejemplo con $^{14}\text{C}^6$

Excesos de masa (de

<https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2016/mass16.txt>)

$$\delta(14, 6) = 3019,8927 \text{ keV}$$

$$\delta(1, 1) = 7288,97061 \text{ keV}$$

$$\delta(1, 0) = 8071,31713 \text{ keV}$$

Calculo de la energía de enlace

$$\begin{aligned}
 B.E. &= 6\delta(1, 1) + 8\delta(1, 0) - \delta(14, 6) \\
 &= 6(7288,97061\text{keV}) + 8(8071,31713\text{keV}) - 3019,8927\text{keV} \\
 &= 105284,4680\text{keV}
 \end{aligned}$$

Para el ^{12}C , $B.E. = 92161,7264\text{keV}$

Tamaño del núcleo

Al ser un sistema cuántico el tamaño es el valor promedio del operador de coordenada en un estado propio.

$$r_0^{min} = \frac{ZZ' e^2}{E}$$

$$R_{Au} \lesssim 3,2 \times 10^{-12} \text{ cm. y } R_{Ag} \lesssim 2 \times 10^{-12} \text{ cm}$$

Tamaño del núcleo por electrones

Partícula pesada a mayor energía $r_0^{min} \rightarrow 0$

$$F(\vec{q}) = \int_{\text{todo el espacio}} d^3r \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = |F(\vec{q})|^2 \left(\frac{d\sigma}{dq^2} \right)_{Mott}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford}$$

Tamaño del núcleo por hadrones

- Protones y piones
- Estructura por fuerza nuclear fuerte

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$
$$\approx 1,2 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} \text{ cm.} = 1,2 A^{\frac{1}{3}} \text{ fm.}$$

Un ejemplo

Núcleo de ${}^{197}\text{Au}^{79}$

$$R = r_0(197)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx 1,2(197)^{\frac{1}{3}} \text{ fm} = 6,9824 \text{ fm}$$

Espines nucleares

- $\frac{1}{2}\hbar$ para protón y neutrón
- Momento angular orbital entero
- Momento angular total **J**
 - Núcleos con número A par tienen espín nuclear entero
 - Núcleos con número A impar tienen espín nuclear semi-entero
 - Núcleos con número par de protones y número par de neutrones (par-par) tienen espín nuclear cero
 - Núcleos muy grandes tienen espín nuclear muy pequeño en su estado base
 - Hace pensar que los nucleones dentro del núcleo están fuertemente apareados

Momneto dipolar

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2mc} \vec{S},$$

El magnetón nuclear

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c},$$

Obtenemos

$$\mu_p \approx 2,79\mu_N, \quad \mu_n \approx -1,91\mu_N.$$

Una mención especial



Figura: Mariano Bauer Ephrussi, 1933-2024

Estabilidad nuclear

- $A \lesssim 40 \Rightarrow N = Z = A/2$
- Núcleos más pesados $\Rightarrow N \approx 1,7Z$

N	Z	Número de núcleos estables
Par	Par	156
Par	Impar	48
Impar	Par	50
Impar	Impar	5

Calculamos energías de enlace

$$\begin{aligned} B.E.(236, 92) &= 92 * (7288,97061 - keV) + 144 * (8071,31713keV) \\ &= 1790410,3188keV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B.E.(92, 36) &= 36 * (7288,97061 - keV) + 56 * (8071,31713keV) + \\ &= 783166,02124keV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B.E.(141, 56) &= 56 * (7288,97061 - keV) + 85 * (8071,31713keV) + \\ &= 1182048,25334keV \end{aligned}$$



Inestabilidad de los núcleos

Radiactividad, descubierta por Becquerel en 1896, trabajando sales de Uranio

- α , núcelos de ${}^4\text{He}^2$
- β , electrones
- γ , fotones de muy alta energía

Modelos nucleares

- Modelos empíricos
- Modelos de partícula independiente
- Modelos de interacción fuerte

Modelo de la gota

- Modelo de interacción fuerte
- Esfera
- Incompresible
- Fisión: se divide en dos gotas más pequeñas
- Nucleones como moléculas de agua
- Tensión superficial

Energía de ligadura en modelo de la gota

$$B.E. = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} \pm a_5 A^{-\frac{3}{4}},$$

$$a_1 \approx 15,5 \text{ MeV}, \quad a_2 \approx 16,8 \text{ MeV}, \quad a_3 \approx 0,72 \text{ MeV}, \\ a_4 \approx 23,3 \text{ MeV}, \quad a_5 \approx 34 \text{ MeV}.$$

Fórmula semi-empírica de Bethe-Weiszäcker

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B.E.}{c^2}$$

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_1}{c^2}A + \frac{a_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^2} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{a_4}{c^2} \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_5}{c^2} A^{-\frac{3}{4}}$$

Modelo de gas de Fermi

- Modelo de partícula independiente
- Agrega la parte cuántica
- Gas de fermiones confinado en el núcleo
- Niveles de energía
- Pozos distintos para protones y neutrones



Energía de Fermi

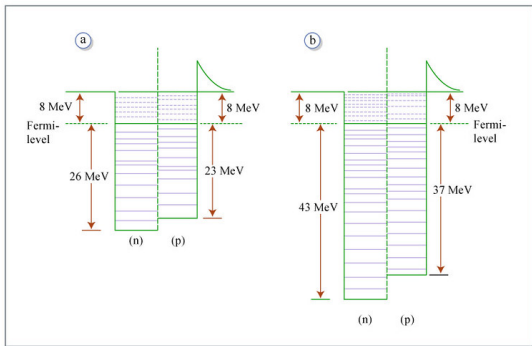


Figura: Esquema de los pozos de potencial en el modelo de Fermi. Figure by MIT OpenCourseWare from Marmier and Sheldon, con licencia CC-BY-NC-SA

Profundidad de pozo

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

$$V_{p_F} = \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$\begin{aligned} V_{TOT} &= V \times V_{p_F} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \times \frac{4\pi}{3} p_F^3 \\ &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 A (r_0 p_F)^3 \end{aligned}$$

Espacio fase

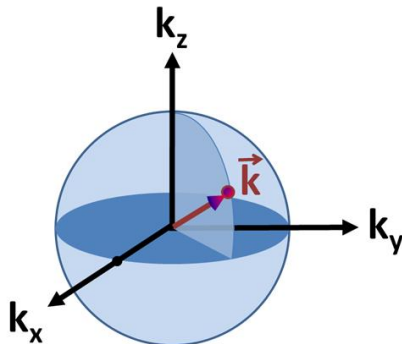


Figura: El espacio fase, imagen de Brews ohare con licencia CC-BY-SA

Energía de Fermi y profundidad

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$V_{\text{estado}} = (2\pi\hbar)^3 = h^3$$

$$n_F = 2 \frac{V_{TOT}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 A (r_0 p_F)^3 = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3,$$

$$N = Z = \frac{A}{2} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3$$

$$\text{despejando } p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Profundidad del pozo

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{r_0} \right)^2 \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 33 \text{ MeV}$$

$$V_0 = E_F + \frac{B}{A} \approx 40 \text{ MeV}$$

Modelo de capas atómico

- Modelo de partícula independiente
- Estados de energía etiquetados por n
- Degeneraciones con el número cuántico
 $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$
- $2\ell + 1$ subestados
- Espín s con $2s + 1$ proyecciones
- (n, ℓ, m_ℓ, m_s)

Estados degenerados

$$\begin{aligned}n_d &= 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) \\&= 2 \left(2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \right) \\&= 2 \left(2 \times \frac{1}{2} n(n-1) + n \right) \\&= 2(n^2 - n + n) = 2n^2\end{aligned}$$

Rompimiento de la degeneración

- Dirección preferencial del espacio
- Campo magnético en la dirección z
- La energía depende de m_ℓ y m_s
- Al potencial se agrega $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Acoplamiento espín-órbita

- El campo magnético se debe al momento angular del núcleo
- Rompe otras degeneraciones
- Estructura fina
- Tengase en cuenta para física nuclear

Esquema de rompimientos

- n niveles de energía con subcapas ℓ
- ℓ muy grande provoca átomos menos esféricos y menos estables
- Todas las capas y subcapas llenas
 - Suma m_ℓ es cero
 - Suma m_s es cero
- $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 0$

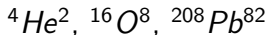
Números mágicos

- Atómicos: $Z = 2, 10, 18, 36, 54,$
- Nucleares:

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82.$$

- Zn^{50} dies isótopos e isótonos estables, In^{49} t Sb^{51} tienen dos isótopos estables.



Ecuación de Schrödinger nuclear

- En el núcleo a diferencia del átomo no tenemos un núcleo central que provee la energía de enlace
- Debemos considerar entonces un potencial central efectivo
- La fuerza nuclear no es tan bien entendida como la fuerza coulombiana del átomo.

Ecuación de Schrödinger nuclear

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

ó

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \right) \psi(\vec{r}) = 0,$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \vec{L}^2,$$

$$\hbar^2 \ell(\ell + 1)$$

Pozo de potencial infinito

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{si } r \geq R \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{\hbar l(l+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl}(r) = 0$$

$$u_{nl}(r) = j_l(k_{nl}r)$$

$$k_{nl} = \sqrt{\frac{2mE_{nl}}{\hbar^2}}.$$

Ecuación radial

Se hace cero en las orillas

$$u_{n\ell}(R) = j_{\ell}(k_{n\ell}R) = 0,$$

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots \text{ para cualquier } \ell$$

La degeneración está sobre m_{ℓ} , por lo que cada nivel se puede llenar con $2(2\ell + 1)$ nucleones

$$2, 2 + 6 = \mathbf{8}, 8 + 10 = \mathbf{18}, 18 + 14 = \mathbf{32}, 32 + 18 = \mathbf{50}, \dots$$

Oscilador armónico

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl} = 0. \quad (1)$$

Solución: polinomios de Laguerre

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ y } \ell = 0, 1, 2, \dots \text{ para } n.$$

Oscilador armónico

$$\Lambda = 2n + \ell - 2$$

$$E_{n\ell} = \hbar\omega \left(\Lambda + \frac{3}{2} \right), \text{ con } \Lambda = 0, 1, 2, \dots,$$

$$n = 2, 8, 20, 40, 70$$

Potencial espín-órbita

- Propuesta 1949 de Maria Goeppert Mayer y Hans Jensen
- Un fuerte acoplamiento espín-órbita
- Siguiendo el ejemplo atómico

Acoplamiento espín-órbita

$$V_{TOT} = V(r) - f(r) \vec{L} \cdot \vec{S},$$

Rompe la degeneración en $j = \ell \pm \frac{1}{2}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

o despejando $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2),$

Estados esperados

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \right\rangle \\
 &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \\
 &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}] \\
 &= \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2} \ell & \text{para } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2} (\ell + 1) & \text{para } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Corrimientos de energía

$$\Delta E_{nl} \left(j = \ell + \frac{1}{2} \right) = - \frac{\hbar^2 \ell}{2} \int d^3 r |\psi_{nl}(\vec{r})|^2 f(r)$$

$$\Delta E_{nl} \left(j = \ell - \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar^2 (\ell + 1)}{2} \int d^3 r |\psi_{nl}(\vec{r})|^2 f(r)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta E_{nl} \left(j = \ell - \frac{1}{2} \right) - \Delta E_{nl} \left(j = \ell + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar^2 \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int d^3 r |\psi_{nl}(\vec{r})|^2 f(r) \end{aligned}$$

Niveles de energía

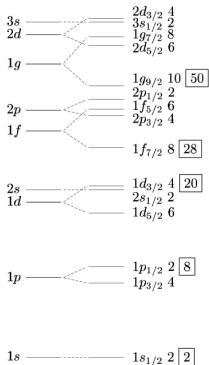


Figura: Diagrama de niveles para el modelo de capas, imagen de Bakken con licencia CC-BY-SA-3.0

Predicciones

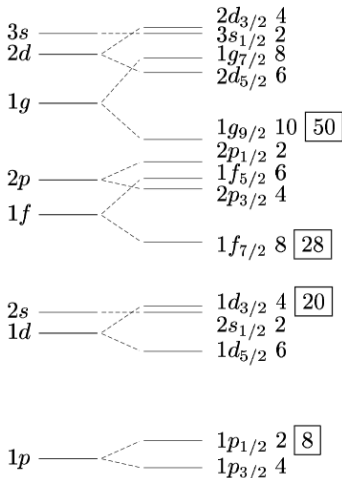
- Espín nuclear j
- Paridad $\pi = (-1)^\ell$
- Momento dipolar

Un ejemplo

Los núcleos espejo $^{13}\text{C}^6$ y $^{13}\text{Ni}^7$

$$(1S_{\frac{1}{2}})^2(1P_{\frac{3}{2}})^4(1P_{\frac{1}{2}})^1$$

Niveles de energía





Modelo colectivo

$$ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} = R^2$$

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} \leq R^2 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases}$$