

Física Nuclear I

Física Nuclear y subnuclear

9 de noviembre de 2023

Tamaño del núcleo por electrones

Partícula pesada a mayor energía $r_0^{min} \rightarrow 0$

$$F(\vec{q}) = \int_{\text{todo el espacio}} d^3r \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = |F(\vec{q})|^2 \left(\frac{d\sigma}{dq^2} \right)_{Mott}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford}$$

Tratemos de aclarar lo del signo

Primero veamos qué pasa con los excesos de masa:



$$\delta(236, 92) = 42444,644 \text{ keV}$$

$$\delta(92, 36) = -68769,320 \text{ keV}$$

$$\delta(141, 56) = -79732,626 \text{ keV}$$

$$\delta(0, 1) = 8071,31713 \text{ keV}$$

$$\delta(1, 1) = 7288,97061 \text{ keV por si acaso}$$

Calculamos energías de enlace, ahora sí de forma correcta

$$\begin{aligned}
 B.E.(236, 92) &= 92 * (7288,97061 - keV) + 144 * (8071,31713keV) \\
 &= 1790410,3188keV
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B.E.(92, 36) &= 36 * (7288,97061 - keV) + 56 * (8071,31713keV) + \\
 &= 783166,02124keV
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B.E.(141, 56) &= 56 * (7288,97061 - keV) + 85 * (8071,31713keV) + \\
 &= 1182048,25334keV
 \end{aligned}$$

Modelos nucleares

- Modelos empíricos
- Modelos de partícula independiente
- Modelos de interacción fuerte

Modelo de la gota

- Modelo de interacción fuerte
- Esfera
- Incompresible
- Fisión: se divide en dos gotas más pequeñas
- Nucleones como moléculas de agua
- Tensión superficial

Energía de ligadura en modelo de la gota

$$B.E. = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} \pm a_5 A^{-\frac{3}{4}},$$

$$a_1 \approx 15,5 \text{ MeV}, \quad a_2 \approx 16,8 \text{ MeV}, \quad a_3 \approx 0,72 \text{ MeV}, \\ a_4 \approx 23,3 \text{ MeV}, \quad a_5 \approx 34 \text{ MeV}.$$

Fórmula semi-empírica de Bethe-Weiszäcker

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B.E.}{c^2}$$

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_1}{c^2}A + \frac{a_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^2} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{a_4}{c^2} \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_5}{c^2} A^{-\frac{3}{4}}$$

Modelo de gas de Fermi

- Modelo de partícula independiente
- Agrega la parte cuántica
- Gas de fermiones confinado en el núcleo
- Niveles de energía
- Pozos distintos para protones y neutrones

Profundidad de pozo

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

$$V_{PF} = \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$\begin{aligned} V_{TOT} &= V \times V_{PF} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \times \frac{4\pi}{3} p_F^3 \\ &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 A (r_0 p_F)^3 \end{aligned}$$

Espacio fase

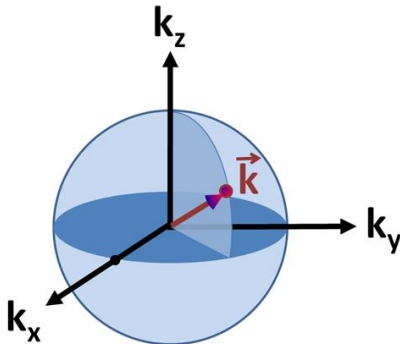


Figura: El espacio fase, imagen de Brews ohare con licencia CC-BY-SA

Energía de Fermi y profundidad

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$V_{\text{estado}} = (2\pi\hbar)^3 = h^3$$

$$n_F = 2 \frac{V_{TOT}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 A (r_0 p_F)^3 = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3,$$

$$N = Z = \frac{A}{2} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3$$

$$\text{despejando } p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Profundidad del pozo

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{r_0} \right)^2 \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 33 \text{ MeV}$$

$$V_0 = E_F + \frac{B}{A} \approx 40 \text{ MeV}$$

Modelo de capas atómico

- Modelo de partícula independiente
- Estados de energía etiquetados por n
- Degeneraciones con el número cuántico
 $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$
- $2\ell + 1$ subestados
- Espín s con $2s + 1$ proyecciones
- (n, ℓ, m_ℓ, m_s)

Estados degenerados

$$\begin{aligned}n_d &= 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) \\ &= 2 \left(2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \right) \\ &= 2 \left(2 \times \frac{1}{2} n(n-1) + n \right) \\ &= 2(n^2 - n + n) = 2n^2\end{aligned}$$

Rompimiento de la degeneración

- Dirección preferencial del espacio
- Campo magnético en la dirección z
- La energía depende de m_ℓ y m_s
- Al potencial se agrega $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Acoplamiento espín-órbita

- El campo magnético se debe al momento angular del núcleo
- Rompe otras degeneraciones
- Estructura fina
- Tengase en cuenta para física nuclear

Esquema de rompimientos

- n niveles de energía con subcapas ℓ
- ℓ muy grande provoca átomos menos esféricos y menos estables
- Todas las capas y subcapas llenas
 - Suma m_ℓ es cero
 - Suma m_s es cero
- $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 0$

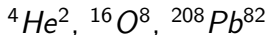
Números mágicos

- Atómicos: $Z = 2, 10, 18, 36, 54,$
- Nucleares:

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82.$$

- Zn^{50} tiene isótopos e isótonos estables, In^{49} t Sb^{51} tienen dos isótopos estables.



Ecuación de Schrödinger nuclear

- En el núcleo a diferencia del átomo no tenemos un núcleo central que provee la energía de enlace
- Debemos considerar entonces un potencial central efectivo
- La fuerza nuclear no es tan bien entendida como la fuerza coulombiana del átomo.

Ecuación de Schrödinger nuclear

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

$$\text{ó } \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \right) \psi(\vec{r}) = 0,$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \vec{L}^2,$$

$$\hbar^2 \ell(\ell + 1)$$

Pozo de potencial infinito

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{si } r \geq R \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{\hbar l(l+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl}(r) = 0$$

$$u_{nl}(r) = j_l(k_{nl}r)$$

$$k_{nl} = \sqrt{\frac{2mE_{nl}}{\hbar^2}}$$

Ecuación radial

Se hace cero en las orillas

$$u_{n\ell}(R) = j_{\ell}(k_{n\ell}R) = 0,$$

$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ y $n = 1, 2, 3, \dots$ para cualquier ℓ

La degeneración está sobre m_{ℓ} , por lo que cada nivel se puede llenar con $2(2\ell + 1)$ nucleones

$$2, 2 + 6 = \mathbf{8}, 8 + 10 = \mathbf{18}, 18 + 14 = \mathbf{32}, 32 + 18 = \mathbf{50}, \dots$$

Oscilador armónico

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) \right) u_{nl} = 0. \quad (1)$$

Solución: polinomios de Laguerre

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ y } \ell = 0, 1, 2, \dots \text{ para } n.$$

Oscilador armónico

$$\Lambda = 2n + \ell - 2$$

$$E_{n\ell} = \hbar\omega \left(\Lambda + \frac{3}{2} \right), \text{ con } \Lambda = 0, 1, 2, \dots,$$

$$n = 2, 8, 20, 40, 70$$

Potencial espín-órbita

- Propuesta 1949 de Maria Goeppert Mayer y Hans Jensen
- Un fuerte acoplamiento espín-órbita
- Siguiendo el ejemplo atómico

Estados esperados

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \right\rangle \\
 &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \\
 &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}] \\
 &= \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2} \ell & \text{para } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2} (\ell + 1) & \text{para } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$



Modelo colectivo

$$ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} = R^2$$

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} \leq R^2 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases}$$