Física Nuclear I

Física Nuclear y subnuclear

19 de octubre de 2023

Núcleo atómico

- Rutherford, Geiger y Marsden descubren el núcleo, piensan que sólo son protones
- Tras repetir el experimento se percibe que no sólo son protones
- 1932 Chadwick descubre el neutrón
- El núcleo es un objeto compuesto

Etiquetado

$^AX^Z$, (X = H, C, Mg, U,...)

- *Isótopo*: núcleos con el mismo número de protones pero distinto número de nucleones, $^AX^Z$ y $^{A'}X^Z$ son isótopos del núcleo X.
- *Isóbaros*: núcleos con el mismo número de nucleones pero distinto número de protones, $^AX^Z$ y $^AX'^{Z'}$ son isóbaros.
- *Isómeros o resonancias*: núcleos exitados a niveles más altos de energía.

Masa del núcleo

$M(^AX^Z) = M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n$ Experimentalmente aparece menos masa

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n$$

Defecto de masa y energía de enlace

$$\Delta M(A, Z) = M(A, Z) - Zm_p - (A - Z)m_n,$$

$$B.E. = \Delta M(A, Z)c^2$$

Energía de enlace y masa

¿Qué signo tiene la energía de enlace?

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + B.E.$$

¿Cuándo es más ligado el núcleo? ¿Cómo se vería para un núcleo inestable?
Un término útil

$$\frac{B}{A} = \frac{-B.E.}{A} = \frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A}$$

Energía de enlace promedio

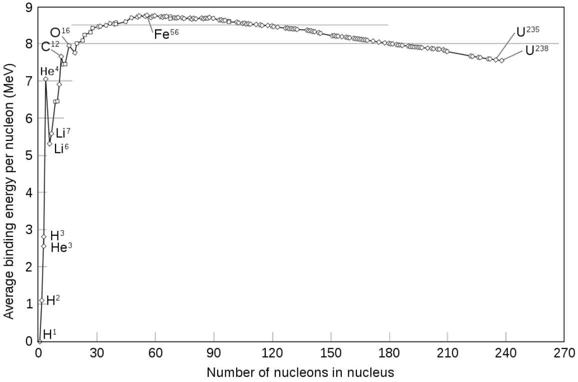


Figura: Gráfica de energía de enlace por nucleón contra número de nucleones A en el núcleo. Imagen de dominio público

Exceso de masa

Un valor listado en tablas

$$\delta(A,Z) = [M(Z,A)[uma] - A]keV/c^2\ c^2$$

La masa

$$M(Z,A) = \delta(A,Z) + A[uma \rightarrow keV/c^2]$$

Energía de enlace en términos de excesos de masa

$$
\begin{aligned}
B.E. =& M(A,Z) - Zm_p - (A-Z)m_n \\
=& (\delta(A,Z) + A) - Z(\delta(1,1) + 1) - (A-Z)(\delta(1,0) + 1) \\
=& \delta(A,Z) + A - Z\delta(1,1) - Z - A\delta(1,0) - A + Z\delta(1,0) + Z \\
=& \delta(A,Z) - Z\delta(1,1) - (A-Z)\delta(1,0)
\end{aligned}
$$

Ejemplo con $^{14}C^{6}$

Excesos de masa (de `https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2016/mass16.txt`)

$$\delta(14,6) = 3019{,}8927\ keV$$
$$\delta(1,1) = 7288{,}97061\ keV$$
$$\delta(1,0) = 8071{,}31713\ keV$$

Calculo de la energía de enlace

$$
\begin{aligned}
B.E. =& \delta(14,6) - 6\delta(1,1) - 8\delta(1,0) \\
=& 3019{,}8927 keV - 6(7288{,}97061 keV) - 8(8071{,}31713 keV) \\
=& -105284{,}4680 keV
\end{aligned}
$$

Energía de separación del último protón

$$
\begin{aligned}
B.E.(A,Z) - B.E.(A-1,Z-1) = \\
&\delta(A,Z) - Z\delta(1,1) - (A-Z)\delta(1,0) \\
&-(\delta(A-1,Z-1) - (Z-1)\delta(1,1) \\
&-((A-1)-(Z-1))\delta(1,0)) \\
=&\delta(A,Z) - \delta(A-1,Z-1) - \delta(1,1)
\end{aligned}
$$

Tamaño del núcleo

Al ser un sistema cuántico el tamaño es el valor promedio del operador de coordenada en un estado propio.

$$r_0^{min} = \frac{ZZ'e^2}{E}$$

$$R_{Au} \lesssim 3{,}2 \times 10^{-12} cm. \text{ y } R_{Ag} \lesssim 2 \times 10^{-12} cm$$

Tamaño del núcleo por electrones

Partícula pesada a mayor energía $r_0^{min} \to 0$

$$F(\overrightarrow{q}) = \int_{\text{todo el espacio}} d^3 r \rho(\overrightarrow{r}) e^{\frac{i}{\hbar}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = |F(\overrightarrow{q})|^2 \left(\frac{d\sigma}{dq^2}\right)_{Mott}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = 4cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford}$$

Tamaño del núcleo por hadrones

- Protones y piones
- Estructura por fuerza nuclear fuerte

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$
$$\approx 1{,}2 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} cm. = 1{,}2 A^{\frac{1}{3}} fm.$$

Un ejemplo

Núcleo de $^{197}Au^{79}$

$$
\begin{aligned}
R &= r_0(197)^{\frac{1}{3}} \\
&\approx 1{,}2(197)^{\frac{1}{3}} fm = 6{,}9824 fm
\end{aligned}
$$

Espines nucleares

- $\frac{1}{2}\hbar$ para protón y neutrón
- Momento angular orbital entero
- Momento angulr total **J**
  - Núcleos con número atómico par tienen espín nuclear entero
  - Núcleos con número atómico impar tienen espín nuclear semi-entero
  - Núcleos con número par de protones y número par de protones (par-par) tienen espín nuclear cero
  - Núcleos muy grandes tienen espín nuclear muy pequeño en su estado base
  - Hace pensar que los nucleones dentro del núcleo están fuertemente apareados

Momneto dipolar

$$\vec{\mu} = g\frac{e}{2mc}\vec{S},$$

El magnetón nuclear

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c},$$

Obtenemos

$$\mu_p \approx 2{,}79\mu_N,\ \ \mu_n \approx -1{,}91\mu_N.$$

Estabilidad nuclear

- $A \lesssim 40 \Rightarrow N = Z = A/2$
- Núcleos más pesados $\Rightarrow N \approx 1{,}7Z$

N	Z	Número de núcleos estables
Par	Par	156
Par	Impar	48
Impar	Par	50
Impar	Impar	5

Tratemos de aclarar lo del signo

Primero veamos qué pasa con los excesos de masa:

$$^{236}U ß ^{92}Kr + ^{141}Ba + 3n$$

$$\begin{aligned}
\delta(236, 92) =& 42444{,}644 keV \\
\delta(92, 36) =& -68769{,}320 keV \\
\delta(141, 56) =& -79732{,}626 keV \\
\delta(0, 1) =& 8071{,}31713 keV \\
\delta(1, 1) =& 7288{,}97061 keV \text{ por si acaso}
\end{aligned}$$

Calculamos energías de enlace

$$
\begin{aligned}
B.E.(236,92) =& 42444{,}644 keV - 92 * (7288{,}97061 - keV) - 144 * (\\
=& -1790410{,}31884 keV \\
B.E.(92,36) =& -68769{,}32 keV - 36 * (7288{,}97061 - keV) - 56 * \\
=& -783166{,}02124 keV \\
B.E.(141,56) =& -79732{,}626 keV - 56 * (7288{,}97061 - keV) - 85 * \\
=& -1182048{,}25334 keV
\end{aligned}
$$

¡Les he fallado!

Figura: Meme con finalidad didáctica

Calculamos energías de enlace, **ahora sí de forma correcta**

$$
\begin{aligned}
B.E.(236,92) =& 92*(7288{,}97061-keV)+144*(8071{,}31713keV)\\
=& 1790410{,}3188keV\\
B.E.(92,36) =& 36*(7288{,}97061-keV)+56*(8071{,}31713keV)+\\
=& 783166{,}02124keV\\
B.E.(141,56) =& 56*(7288{,}97061-keV)+85*(8071{,}31713keV)+\\
=& 1182048{,}25334keV
\end{aligned}
$$

Inestabilidad de los núcleos

Radiactividad, descubierta por Becquerel en 1896, trabajando sales de Uranio

- α, núcelos de ${}^4He^2$
- β, electrones
- γ, fotones de muy alta energía

Fuerza nuclear

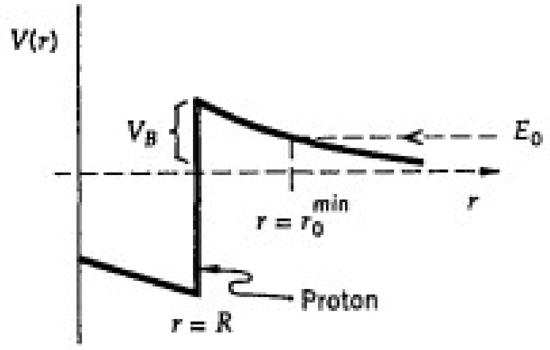


Figura: Esquema del potencial nuclear. Tomado del libro de Das y Ferbel

Modelos nucleares

- Modelos empíricos
- Modelos de partícula independiente
- Modelos de interacción fuerte

Modelo de la gota

- Modelo de interacción fuerte
- Esfera
- Icompresible
- Fisión: se divide en dos gotas más pequeñas
- Nucleones como moléculas de agua
- Tensión superficial

Energía de ligadura en modelo de la gota

$$B.E. = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \pm a_5 A^{-\frac{3}{4}},$$

$$a_1 \approx 15{,}5\ MeV, \quad a_2 \approx 16{,}8\ MeV, \quad a_3 \approx 0{,}72\ MeV,$$
$$a_4 \approx 23{,}3\ MeV, \quad a_5 \approx 34\ MeV.$$

Fórmula semi-empírica de Bethe-Weiszäcker

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B.E.}{c^2}$$

$$\begin{aligned} M(A, Z) =& Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{a_1}{c^2}A \\ &+ \frac{a_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^{@}}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{a_4}{c^2}\frac{(N - Z)^2}{A} \pm \frac{a_5}{c^2}A^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Modelo de gas de Fermi

- Modelo de partícula independiente
- Agrega la parte cuántica
- Gas de fermiones confinado en el núcleo
- Niveles de energía
- Pozos distintos para protones y neutrones

Energía de Fermi

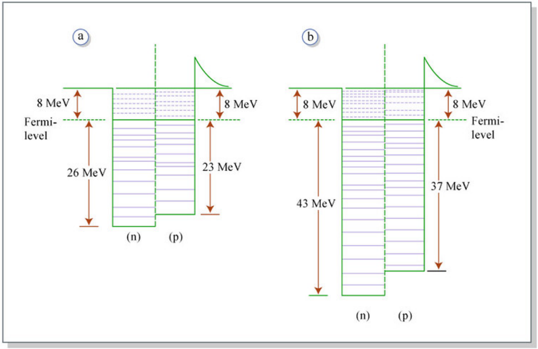


Figura: Esquema de los pozos de potencial en el modelo de Fermi. Figure by MIT OpenCourseWare from Marmier and Sheldon, con licencia CC-BY-NC-SA

Profundidad de pozo

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

$$V_{p_F} = \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$\begin{aligned} V_{TOT} = & V \times V_{p_F} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \times \frac{4\pi}{3} p_F^3 \\ = & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 A (r_0 p_F)^3 \end{aligned}$$

Espacio fase

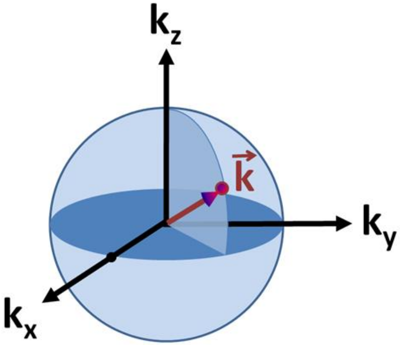


Figura: El espacio fase, imagen de Brews ohare con licencia CC-BY-SA

Energía de Fermi y profundidad

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$V_{estado} = (2\pi\hbar)^3 = h^3$$

$$n_F = 2\frac{V_{TOT}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 A(r_0 p_F)^3 = \frac{4}{9\pi}A\left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3,$$

$$N = Z = \frac{A}{2} = \frac{4}{9\pi}A\left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3$$

$$\text{despejando } p_F = \frac{\hbar}{r_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Profundidad del pozo

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 33\ MeV$$

$$V_0 = E_F + \frac{B}{A} \approx 40\ MeV$$

Modelo de capas atómico

- Modelo de partícula independiente
- Estados de energía etiquetados por n
- Degeneraciones con el número cuántico $\ell = 0, 1, 2, ..., n-1$
- $2\ell + 1$ subestados
- Espín s con $2s + 1$ proyecciones
- $(n,\ \ell,\ m_\ell,\ m_s)$

Estados degenerados

$$
\begin{aligned}
n_d &= 2\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) \\
&= 2\left(2\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell+\sum_{\ell=0}^{n-1}1\right) \\
&= 2\left(2\times\frac{1}{2}n(n-1)+n\right) \\
&= 2(n^2-n+n) = 2n^2
\end{aligned}
$$

Rompimiento de la degeneración

- Dirección preferencial del espacio
- Campo magnético en la dirección z
- La energía depende de m_ℓ y m_s
- Al potencial se agrega $-\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B}$

Acoplamiento espín-órbita

- El campo magnético se debe al momento angular del núcleo
- Rompe otras degeneraciones
- Estructura fina
- Tengase en cuenta para física nuclear

Esquema de rompimientos

- n niveles de energía con subcapas ℓ
- ℓ muy grande provoca átomos menos esféricos y menos estables
- Todas las capas y subcapas llenas
  - Suma m_ℓ es cero
  - Suma m_s es cero
- $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S} = 0$

Números mágicos

- Atómicos: $Z = 2, 10, 18, 36, 54,$
- Nucleares:

$$\begin{aligned} N =& 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \\ Z =& 2, 8, 20, 28, 50, 82. \end{aligned}$$

- Zn^{50} dies isótopos e isótonos estables, In^{49} t Sb^{51} tienen dos isótopos estables.

${}^{4}He^{2}$, ${}^{16}O^{8}$, ${}^{208}Pb^{82}$

Ecuación de Schrödinger nuclear

- En el núcleo a diferencia del átomo no tenemos un núcleo central que provee la energía de enlace
- Debemos considerar entonces un potencial central efectivo
- La fuerza nuclear no es tan bien entendida como la fuerza coulombiana del átomo.

Ecuación de Schrödinger nuclear

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

$$\text{ó} \quad \left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{r}))\right)\psi(\vec{r}) = 0,$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\vec{L}^2,$$

$\hbar^2\ell(\ell+1)$

Pozo de potencial infinito

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{si } r \geq R \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{n\ell} - \frac{\hbar\ell(\ell+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{n\ell}(r) = 0$$

$$u_{n\ell}(r) = j_\ell(k_{n\ell} r)$$

$$k_{n\ell} = \sqrt{\frac{2mE_{n\ell}}{\hbar^2}}.$$

Ecuación radial

$$
\begin{aligned}
u_{n\ell}(R) =& j_\ell(k_{n\ell}R) = 0, \\
& \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ y } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ para cualquier } \ell
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{2}, 2 + 6 = \mathbf{8}, 8 + 10 = \mathbf{18}, 18 + 14 = \mathbf{32}, 32 + 18 = \mathbf{50}, \ldots$$

Oscilador armónico

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{n\ell} - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} \right) \right) u_{n\ell} = 0. \quad (1)$$

Solución: polinomios de Laguerre

$E_{n\ell} = \hbar\omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right)$, $n = 1, 2, 3, ..$ y $\ell = 0, 1, 2, ...$ para n.

Oscilador armónico

$$\Lambda = 2n + \ell - 2$$

$$E_{n\ell} = \hbar\omega\left(\Lambda + \frac{3}{2}\right), \; \textit{con}\ \Lambda = 0, 1, 2, ...,$$

$$n = 2, 8, 20, 40, 70$$

Potencial espín-órbita

- Propuesta 1949 de Maria Goeppert Mayer y Hans Jensen
- Un fuerte acoplamiento espín-órbita
- Siguiendo el ejemplo atómico

Acoplamiento espín-órbita

$$V_{TOT} = V(r) - f(r)\vec{L} \cdot \vec{S},$$

Rompe la degeneración en $j = \ell \pm \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{L} + \vec{S} \\ \vec{J}^2 &= \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \\ \text{o despejando } \vec{L} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2), \end{aligned}$$

Estados esperados

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \langle \frac{1}{2}(\vec{J}^{\,2} - \vec{L}^{\,2} - \vec{S}^{\,2}) \rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \\
&= \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}] \\
&= \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2}\ell & \text{para } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2}(\ell+1) & \text{para } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Corrimientos de energía

$$\Delta E_{n\ell}\left(j=\ell+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\hbar^2\ell}{2}\int d^3r|\psi_{n\ell}(\overrightarrow{r})|^2 f(r)$$

$$\Delta E_{n\ell}\left(j=\ell-\frac{1}{2}\right)=\frac{\hbar^2(\ell+1)}{2}\int d^3r|\psi_{n\ell}(\overrightarrow{r})|^2 f(r)$$

$$\begin{aligned}\Delta =&\Delta E_{n\ell}\left(j=\ell-\frac{1}{2}\right)-\Delta E_{n\ell}\left(j=\ell+\frac{1}{2}\right)\\ =&\hbar^2\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\int d^3r|\psi_{n\ell}(\overrightarrow{r})|^2 f(r)\end{aligned}$$

Niveles de energía

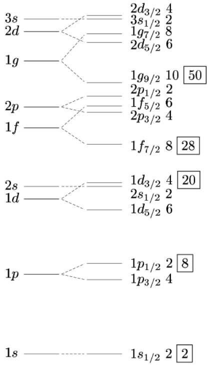


Figura: Diagrama de niveles para el modelo de capas, imagen de Bakken con licencia CC-BY-SA-3.0

Predicciones

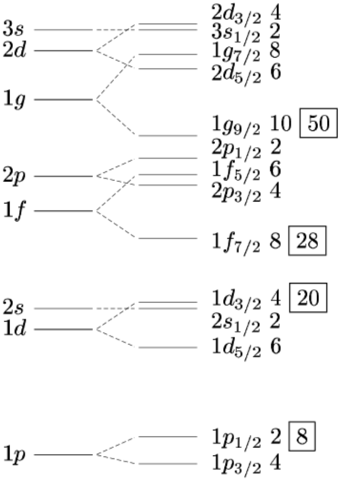
- Espín nuclear j
- Paridad $\pi = (-1)^{\ell}$
- Momento dipolar

Un ejemplo

Los núcleos espejo $^{13}C^{6}$ y $^{13}Ni^{7}$

$$(1S_{\frac{1}{2}})^2(1P_{\frac{3}{2}})^4(1P_{\frac{1}{2}})^1$$

Niveles de energía



Modelo colectivo

$$ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} = R^2$$

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{para } ax^2 + by^2 + \frac{z^2}{ab} \leq R^2 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases}$$