

Experimentos en física de partículas y nuclear

Física Nuclear y subnuclear

5 de octubre de 2023



Partículas cargadas

- Interacción coulombiana
- Electrones o el núcleo
- Depositando energía
- Sufriendo dispersiones



Partículas cargadas

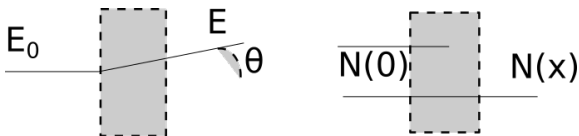


Figura: Esquema del paso de partículas a través de la materia



Distribución

- Suceden múltiples y pequeñas dispersiones
- Tenemos una distribución en energía y ángulo para las partículas que salen.
- Rango R_0

Grosor

$$x_\rho = x\rho[\text{gr}/\text{cm}^2] \quad (1)$$



Partículas cargadas pesadas

- Colisiones inelásticas con los electrones (las más)
- Colisiones elásticas con el núcleo (las menos)
- Otros procesos posibles
 - Radiación Cherenkov
 - Reacciones nucleares
 - Bremsstrahlung



La división

- Electrones y positrones
- El resto de leptones, hadrones y núcleos ligeros
- Núcleos pesados

Poder de frenamiento

Pérdidas por ionización

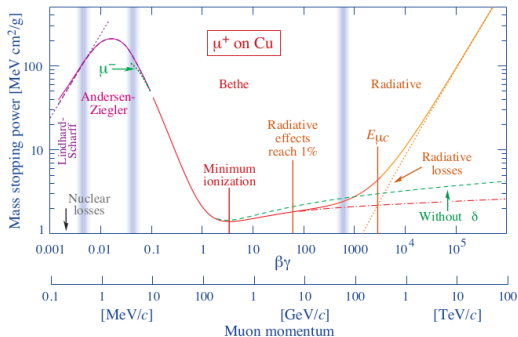


Figura: Poder de frenamiento másico para anti-muones en cobre como función de $\beta\gamma = p/Mc$ Tomada de PDG: P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), to be published in Prog. Theor. Exp. Phys. 2020. 083C01 (2020).



Bethe-Bloch

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}$$

$$-\frac{dE}{dx} = (4\pi N_A r_e^2 m_e c^2) z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \times \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$



Ecuación de Bethe-Bloch compacta

$$-\frac{dE}{dx} = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] \quad (2)$$

$$K = 0,3071 \text{ MeVmol}^{-1} \text{cm}^2$$

$$K/A = 0,3071 \text{ MeVgr}^{-1} \text{cm}^2 \text{ (con } A = 1 \text{gr/mol)}$$



Pérdida de energía total

$$\Delta E_{perdida} = -\rho \int_0^d \frac{dE}{dx} dx$$



Un ejercicio

- Qué distancia recorre un protón de 10GeV de energía cinética en una barra de plomo de bastante grosor.

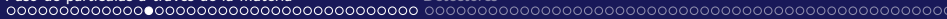
$$\rho_{Pb} = 11,34 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

$$m_p = 0,938 \text{GeV} / c^2$$



Obteniendo valores relativistas I

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{E_T}{E_R} \\ &= \frac{E_K + E_R}{E_R} \text{ ya que } E_T = E_K + E_R \\ &= \frac{E_k + m_p c^2}{m_p c^2} \text{ para el protón } E_R = M_p c^2 \\ &= \frac{E_k}{m_p c^2} + 1 \text{ distribuyendo la fracción} \\ &= \frac{10 \text{ GeV}}{0,938 \text{ GeV}} + 1 = \mathbf{10,6609}.\end{aligned}$$



Obteniendo valores relativistas II

Para obtener $\beta = 0,9963$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$



Calculamos la pérdida

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = -0,3071 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{gr}} (1)^2 \frac{82}{207} \frac{1}{(0,9963)^2} \left[\ln \left(\frac{2(5,11\text{e}5\text{eV}/c^2)c^2(0,9963)^2(11,6609)^2}{820\text{eV}} \right) \right]$$

$$\ln \left(\frac{2(5,11\text{e}5\text{eV}/c^2)c^2(0,9963)^2(11,6609)^2}{820\text{eV}} \right) = 12,033$$

El resto

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = -0,3071 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{gr}} (1)^2 \frac{82}{207} \frac{1}{(0,9963)^2} [12,033 - 0,9963^2]$$

$$= -1,35309 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{gr}}$$



Últimos detalles

$$\rho \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \left(11,34 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right) \left(1,3531 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{gr}} \right) = 15,3441 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}$$

$$\begin{aligned} R &= \int_{E_0}^0 \frac{dE}{\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle} = \int_{10\text{GeV}}^0 \frac{dE}{15,3441 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}} \\ &= \frac{1}{15,3441 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}} \int_{10\text{GeV}}^0 dE = \frac{1}{15,3441 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}} (10\text{GeV}) \\ &= \frac{10000\text{MeV}}{15,3441 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}} = 651,7162\text{cm} = 6,5171\text{m}. \end{aligned}$$



Dispersión múltiple: ángulos pequeños

$$\theta_0 = \theta_{plano}^{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{espacio}^{rms} \quad (3)$$

$$\theta_0 = \frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0,038 \ln \left(\frac{xz^2}{X_0 \beta^2} \right) \right] \quad (4)$$



Longitud de radiación

- La distancia para la cual la energía del electrón se reduce en $1/e$
- $7/9$ del camino libre medio de fotones para producción de pares

$$X_0 = 716,4 \frac{gr}{cm^2} \frac{A}{Z(Z+1) \ln \left(\frac{287}{\sqrt{Z}} \right)}$$

Radiación Cherenkov

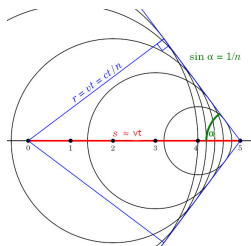


Figura: Cono de luz de Cherenkov. Imagen de dominio público realizada por Pieter Kuiper, tomada de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cherenkov2.svg>.



Cono de luz Cherenkov

$$v = \beta c = \frac{c}{n},$$

$$v_{part} > \frac{c}{n}.$$

$$\cos\theta_C = \frac{1}{\beta n} \quad (5)$$

Pérdida de energía $\approx 500\text{eV}/\text{cm}$.



Ejercicio

Ejercicio: ¿Qué ángulo forma el cono de luz Cherenkov para protones con una energía cinética de 1 GeV que entra a agua (índice de refracción $n = 1,333$)?

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{E_T}{E_R} = \frac{E_K}{E_r} + 1 \\ &= \frac{E_K}{m_p c^2} + 1 = \frac{1 \text{ GeV}}{0,938 \text{ GeV}} + 1 \\ &= 2,06609,\end{aligned}$$



Ejercicio II

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = \sqrt{\frac{(2,06609)^2 - 1}{(2,06609)^2}} \\ &= 0,87506\end{aligned}$$

Sustituimos, con $n = 1,333$

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n} = \frac{1}{(0,87506)(1,333)} = 0,8572$$

Obtenemos el ángulo

$$\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta n}\right) = \cos^{-1}(0,8572) = \mathbf{30,99^\circ}$$



Partículas cargadas ligeras

Pérdidas de energía por radiación son las más por encima de:

$$E_c \approx \frac{600 \text{ MeV}}{Z} \quad (6)$$

Para N , $Z = 7$, entonces $E_c = 85,71 \text{ MeV}$



Corrección a Bethe-Bloch

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = (4\pi N_A r_e^2 m_e c^2) \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau(\tau+2)}{2(I/m_e c^2)^2} \right) + F(\tau) - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right],$$

donde τ es la razón $E_K/m_e c^2$ y

$$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2/8 - (2\tau+1)\ln(2)}{(\tau+1)^2} \text{ para } e^-$$

$$F(\tau) = 2\ln(2) - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{\tau+2} + \frac{10}{(\tau+2)^2 + \frac{4}{(\tau+2)^3}} \right) \text{ para } e^+$$



Radiación *bremstrahlung*

Para electrones/positrones

$$\sigma_b \propto r_e^2 = (e^2/m_e c^2)^2$$

Las pérdidas por radiación para un $\mu^- \sim 40000$ veces menor
Además

- Radiación sincrotrón
- Radiación ciclotrón



Pérdidas por radiación en electrones/positrones

Bethe y Heitler hacen el tratamiento cuántico

$$N(\omega)d\omega \propto Z^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (7)$$

- Pierde fracción $1/e$ de su energía en X_0

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right) \approx \frac{E}{X_0}, \text{ es decir } E = E_0 e^{-x/X_0} \quad (8)$$

¿Se procede igual? No es tan fácil.



Fotones

- Efecto fotoeléctrico
- Efecto Compton
- Producciones de pares ($E > 2m_e c^2$)



Dispersión de Compton

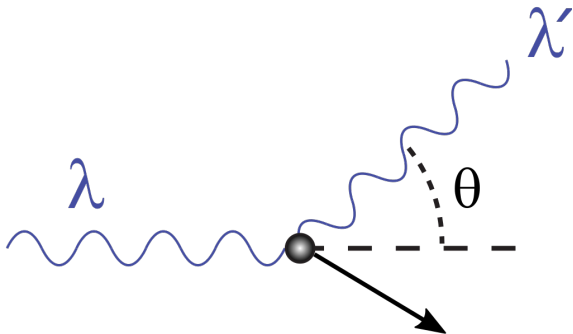


Figura: Dispersión de Compton, el fotón es marcado por $\lambda = 1/\nu$.
Imagen tomada de This file is licensed under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.



Relaciones dispersión de Compton

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)}, \quad (9)$$

$$T_e = h\nu - h\nu' = h\nu \frac{\gamma(1 - \cos\theta)}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)}$$

Límite de Compton

$$T_{max} = h\nu \left(\frac{2\gamma}{1 + 2\gamma} \right) \quad (10)$$



Producción de pares

- Fotón crea un par electrón-positrón
- Solo puede suceder dentro del medio
- Conservación de la energía y el momento
- Mínimo de energía de $2m_e c^2$



Camino libre medio para producción de pares

$$X_{pares} = \mu_{pares}^{-1} \approx \frac{9}{7} X_0$$

¿Qué sucede con el positrón después?



Coeficiente de absorción

$$\mu = n\sigma$$



Analizando la figura

- La distancia entre padre e hijo es una λ_0
- Suponemos cada partícula hija se lleva $E_0/2$
- Tras t longitudes de radiación:
 - 2^t partículas
 - $E(t) \approx \frac{E_0}{2^t}$



Máxima profundidad

$$E(t_{max}) = \frac{E_0}{2^{t_{max}}} = E_c, \text{ despejando,}$$

$$2^{t_{max}} = \frac{E_0}{E_c}, \text{ sacando logaritmo base 2,}$$

$$t_{max} = \log_2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right), \text{ truco para sacarlo}$$

$$t_{max} = \frac{\ln \left(\frac{E_0}{E_c} \right)}{\ln(2)} \text{ ese sí.}$$



Cantidad final de partículas

$$N_{max} \approx 2^{t_{max}} = 2^{\log_2(E_0/E_c)}$$
$$\approx \frac{E_0}{E_c}$$

Apertura de la cascada

$$R_M = X_0 \frac{E_S}{E_c}, \text{ donde}$$

$$E_S = m_e c^2 \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = 21,2 \text{ MeV}$$

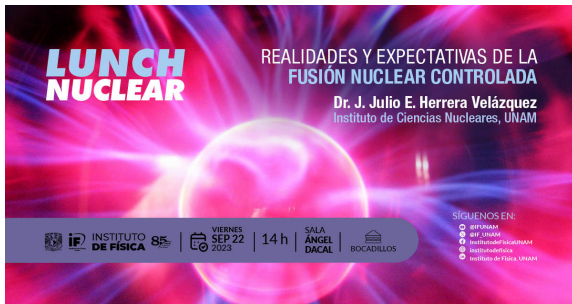


Interacciones de neutrones

¿Qué pasa con los neutrones?



Lunch nuclear



- Sala Ángel Dacal del edificio colisur del IFUNAM
- viernes 22 de septiembre, 2:00 pm, habrá comida
- Invitado Dr. Julio Herrera
- Física de plasmas y fusión nuclear



Detectores de ionización

- Funcionan en el mismo rango de Bethe-Bloch
- Se aplica un campo eléctrico
- Medio ionizable (bajo potencial de ionización) y químicamente estable (no recombina rápido)
- Eletrodos: ánodo y cátodo



Detectores de ionización

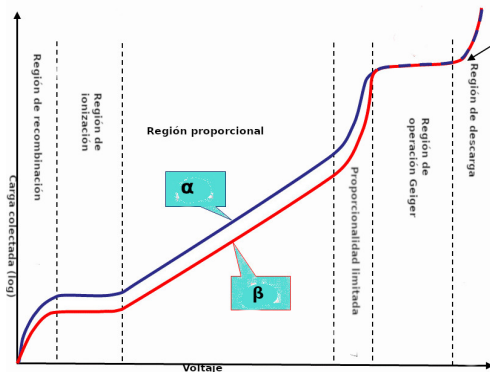


Figura: Regiones de operación de los detectores de ionización. Imagen adaptada de la original de Doug Sim con licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported



Contadores de ionización

- En la región de ionización
- Poco sensible a los cambios de voltaje
- Sin amplificación
- Requiere filtros
- Respuesta rápida

$$E = \frac{V}{d} \text{ placas planas, } E = \frac{V}{r \ln\left(\frac{r_c}{r_a}\right)}$$



Contadores proporcionales

- Región proporcional
- Campos eléctricos intensos $\sim 10^4 V/cm$
- Hay amplificación $\sim 10^5$
- Cerca del ánodo sucede la *avalancha de Townsend*



Cámaras multilámbricas

- Diseñadas por George Charpak en 1968
- Alambres de $10 - 50\mu m$ separados por $2mm$.
- Cátodos a $1cm$ por encima y debajo
- Resoluciones espaciales $\approx 50 - 200\mu m$
- Resoluciones temporales $\approx 2ns$



Cámaras de deriva

- Similar a la cámara multialámbrica, su heredera
- Resolución espacial y temporal
- Alambres adicionales para asegurar un voltaje constante
- Los electrones sufren una deriva
- Cámara Jet en DESY



TPC

- Time Projection Chambers
- Barril cilíndrico alrededor de la tubería del haz en un acelerador
- En cada orilla de la cámara hay capas de contadores proporcionales
- Un campo Magnético paralelo y anti-paralelo al campo eléctrico
- La deriva es helicoidal
- Microstrip Gas Chambers



Detector Geiger-Muller

- Funciona en el límite
- Produce una descarga por cada partícula que produce una ionización

Detector Geiger-Müller

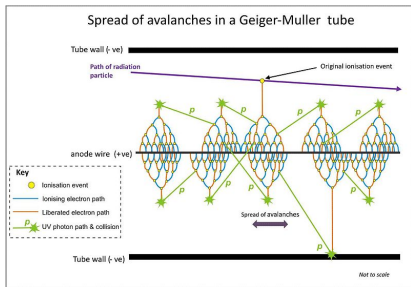


Figura: Detector Geiger-Müller. This file is licensed under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.



Detectores de centelleo

- Excitaciones de los átomos del material
- Al regresar al estado base: emiten un fotón
- Centelladores orgánicos: antraceno, naftaleno
- Centelladores inorgánicos: NaI, CsI dopados
- 10^4 fotones/cm.

PMT

100 – 200V, multiplicaciones de 10^4 a 10^7

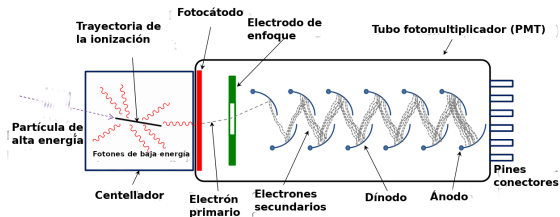


Figura: Tubo fotomultiplicador. Imagen de Wiso con licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

¿Usos de centelladores?



Detector Cherenkov

- Partículas cargadas, pero el proceso no es ionización
- Viaja más rápido que la luz *en el medio* $v > c/n$ o $\beta > 1/n$.
- $\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}$
- 213 fotones/cm
- Ring-image Cherenkov



Detectores semiconductores

- Semiconductores: electrones de valencia a electrones de conducción
- Detectores de ionización pero electrón-hoyo en lugar de electrón-ión
- De germanio o silicio
- Para producir un par: $3 - 4eV$. Ionización 10 veces más, centelleo 100 veces más.
- $200 - 300\mu m$ de grosor



Calorímetro

- Las partículas depositan toda su energía cinética
- Centelladores, contadores de ionización o proporcionales
- Fotones: producción de pares
- Hadrones: procesos fuertes
- Problemáticos: neutrinos y π^0
- Precisión relativa en medida de energía $\Delta E/E \approx E^{1/2}$
- Resolución temporal $\sim 10 - 100ns$



Aceleradores



Figura: Foto del Tevatrón en Fermilab. Imagen de Fermilab, Reidar Hahn, del dominio público



Partículas nuevas

- De forma natural tenemos poca variedad
- Partículas de mayor masa requiere mayor energía
- ¿Límite?: posiblemente $\hbar c / G_g \approx 1,22 \times 10^{20} \text{eV} / c^2$

Estudios de estructura

$$\lambda = h/p$$

$$\bar{\lambda} = \lambda/2\pi = \hbar/p$$

$$\bar{\lambda} \leq d, \quad p \geq \hbar/d$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_p &= \frac{\hbar}{m_p c} = \frac{\hbar c}{m_p c^2} \\ &= \frac{197,3 \text{ MeV fm}}{938 \text{ MeV}} = 0,210 \text{ fm} \end{aligned}$$

$$E_{kin} = p^2/2m_p = \hbar^2/2m_p d^2$$

$$\frac{E_{kin}}{m_p c^2} = \frac{1}{2d^2} \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2$$

$$\frac{E_{kin}}{m_p c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}_p}{d} \right)^2 = 0,02$$

$$E_{kin} = 0,02 m_p c^2 = 0,02 \times 938 \text{ MeV}$$

Aceleración

$$\blacksquare E = Fd = q|E|d = qV$$

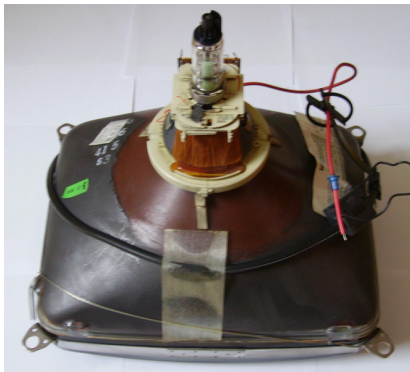


Figura: Foto de un cinescopio de televisión. Imagen de JMPerez commonswiki con licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

Conceptos útiles

- *Flujo*: la cantidad de partículas que cruzan un área unitaria perpendicular al eje del haz por unidad de tiempo

$$\mathcal{F} = n_i v, \quad (11)$$

$$dN = \mathcal{F} N \sigma d\Omega$$

- *Luminosidad*: la cantidad de eventos por unidad de sección eficaz que tienen lugar en una sección de encuentro del haz por unidad de tiempo

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{N}_s}{\sigma_{tot}} = \frac{N_1 N_2 f}{A},$$

$$\sigma(\theta) d\Omega = d\sigma(\theta) \Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$$

Generadores electrostáticos

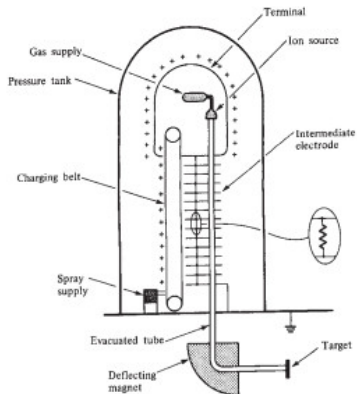


Figura: Esquema de un generador Van de Graaff. Tomado con fines educativos de Henley

Van de Graff

- Llega a 30 – 40 MeV
- Más energías con un Van de Graff tandem
- Un tandem en el IFUNAM



Aceleradores lineales



Figura: Foto del acelerador lineal de Stanford, 3 km de longitud.
Imagen de Victor Blacus en dominio público



Linac

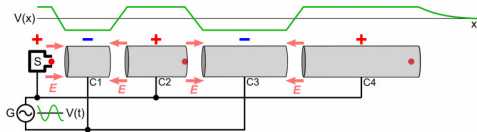


Figura: Esquema de un acelerador lineal. Imagen adaptada de Chetvorno con licencia CC0

Óptica del haz

- Lentes magnéticas
- Dipolos pueden deflectar
- Cuadrupolos lo más parecido a una lente óptica

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$$



Ciclotrón

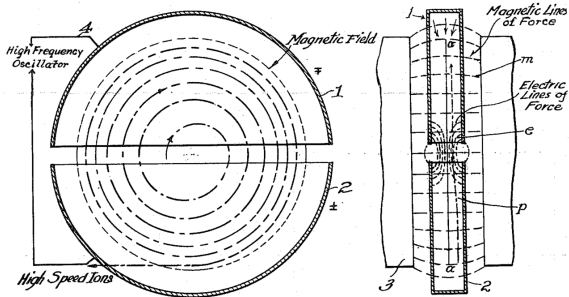


Figura: Esquema de funcionamiento de un ciclotron. Imagen de Ernest O. Lawrence - U.S. Patent 1,948,384, de dominio público

Resonancia y energía

$$\frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q}{m} \right) B$$

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{qB}{m} \right)^2 R^2 = \frac{(qBR)^2}{2m} \end{aligned}$$

Sincrotrón

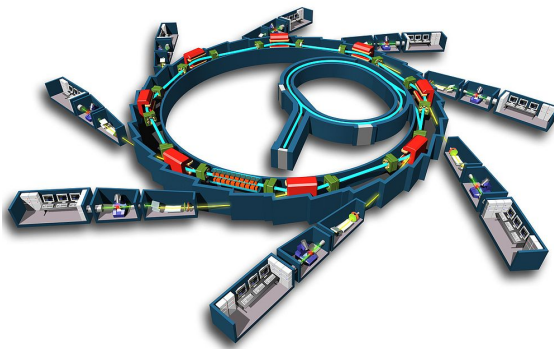


Figura: Modelo de un acelerador sincrotrón. Imagen de EPSIM 3D/JF Santarelli, Synchrotron Soleil



Método Monte Carlo

- Tratamiento estadístico en experimentos
- Integración numérica
- Optimización



Números pseudo-aleatorios

- Para acercarnos a la naturaleza necesitamos lo más aleatorio
- Las computadoras no pueden generar números aleatorios
- Mecanismos pseudo-aleatorios
- Complementos verdadero-aleatorios



El código

```
from pylab import plot, show

N=100
a=1664525
c=101390422
m=4294967296
x=1
results=[]

for i in range(N):
    x=(a*x+c)%m
    results.append(x)

plot(results,"o")
show()
```

Algoritmo Mersenne twister

- Makoto Matsumoto y Takuji Nishimura en 1996, mejora en 2002
- Período: $2^{19937} - 1$
- Propiedad de equidistribución de 623-dimensiones¹.
- Uso eficiente de la memoria, consume sólo un espacio de trabajo de 624 palabras (la implementación en C).

¹Una secuencia de números reales es equidistribuida o uniformemente distribuida si la proporción de términos que caen en un subintervalo es proporcional a la longitud de tal subintervalo.



Uso del algoritmo Mersenne twister

- Un valor inicial: semilla ($x = 1$ en el ejemplo anterior)
- Opción con distinto peso: generar uniformemente en $[0, 1]$ y dar pesos.

```
from random import random
```

```
N=100
```

```
agui=0
```

```
so=0
```

```
for i in range(N):
```

```
    if random()<0.2:
```

```
        print("Aguila")
```

```
        agui+=1
```

```
    else:
```

```
        print("Sol")
```

```
        so+=1
```

```
print("Aguilas:␣", agui)
```

```
print("Soles:␣", so)
```



Decaimiento radiactivo

Ley de deacímiento

$$N(t) = N(0)2^{-t/\tau},$$

Probabilidad de decaimiento

$$p(t) = 1 - 2^{-t/\tau}$$

Consideramos 1000 núcleos de ^{208}Tl

- $\tau_{^{208}\text{Tl}} = 3,053$ minutos
- Decae a ^{208}Pb

Simulemos

- Generamos uniformemente
- si cae entre 0 y $p(t)$ decae, de lo contrario no
- Similar al águila o Sol contamos si es ^{208}Tl o si es ^{208}Pb



Programa 1

```
from random import random
from numpy import arange
from pylab import plot,xlabel,ylabel,show

#Constantes
NTl = 1000          #numero inicial de thalios
NPb = 0            #numero inicial de plomos
tau = 3.053*60     #vida media del thalio en seg.
th = 1.0           #tamano de paso en el tiempo seg.
p = 1-2**(-th/tau) #probabilidad de que decaiga un Tl
tmax = 1000        #tiempo total seg

#los puntos a graficar
tpuntos = arange(0.0,tmax,th)
Tlpuntos = []
Pbpuntos = []
```



Programa II

```
#ciclo principal
for t in tpuntos:
    Tlpuntos.append(NT1)
    Pbpuntos.append(NPb)

#calculando el numero de nucleos que decayeron
decay=0
for i in range(NT1):
    if random() < p:
        decay+=1
NT1 -= decay
NPb += decay

#La grafica
plot(tpuntos, Tlpuntos)
plot(tpuntos, Pbpuntos)
xlabel("Tiempo")
ylabel("Numero de nucleos")
show()
```




Resultado

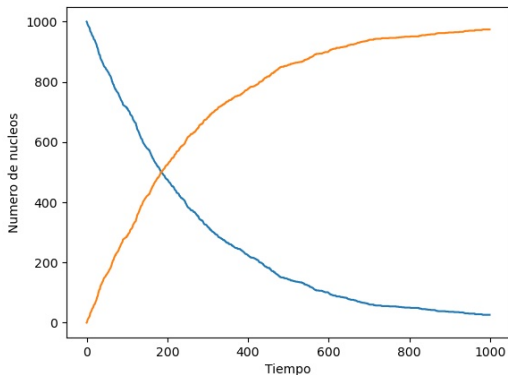


Figura: Simulación del decaimiento del ^{208}Tl (azul) en ^{208}Pb (amarillo).



Números aleatorios no uniformes

La probabilidad de decaimiento diferencial

$$\begin{aligned} dp &= 1 - 2^{-dt/\tau} \\ &= 1 - \exp(\ln(2^{-dt/\tau})) \\ &= 1 - \exp\left(\frac{-dt}{\tau} \ln(2)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{dt}{\tau} \ln(2)\right), \text{ aproximando a primer orden la exponencial} \\ &= \frac{dt}{\tau} \ln(2) \end{aligned}$$



Distribución de probabilidad

La probabilidad de que un núcleo se mantenga sin decaer tras un tiempo t

$$P(t) = 2^{-t/\tau} \frac{\ln(2)}{\tau} dt \quad (12)$$

Ya no es constante, conforme pasa t cambia

Método de transformación

- Distribución de probabilidad genera z con probabilidad $q(z)$
- Probabilidad de generar un número entre z y $z + dz$: $q(z)dz$
- Función $x = x(z)$, con $p(x)$

$$p(x)dx = q(z)dz$$



Determinar $x(z)$

- Sea $q(z)$ la distribución uniforme:

$$q(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (13)$$



Transformando

Integramos la igualdad entre las distribuciones

$$\int_{-\infty}^{x(z)} p(x') dx' = \int_0^z (1) dz' = z \quad (14)$$

Por suerte el lado derecho es integrable

$$\begin{aligned} z &= \int_{-\infty}^{t(z)} p(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{t(z)} \frac{\ln(2)}{\tau} 2^{-t'/\tau} dt' \\ &= \ln(2)(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$



Resultado transformación

$$t = -\tau \ln \left(1 - \frac{z}{\ln(2)} \right). \quad (15)$$



El programa

```
from random import random
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Constantes
NT1 = 1000          #numero inicial de thalios
tau = 3.053*60     #vida media del thalio en seg.

#los puntos a graficar
temps = []

#Determinando tiempo de decaimiento
for i in range(NT1):
    t = -tau*np.log(1-random())/np.log(2)
    temps.append(t)

#Armamos el histograma

#La grafica
(counts, bins, patches) = plt.hist(temps)
plt.xlabel("Tiempos")
plt.ylabel("Eventos")
```


Histograma

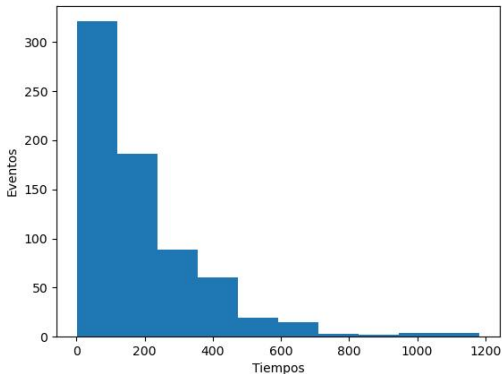


Figura: Simulación del decaimiento de ^{208}Tl , histograma de tiempos.

Distribución Gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

¿La podemos integrar?

- Hacemos cambio de variable

$$\begin{aligned} p(x)dx \times p(y)dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy, \end{aligned}$$

En coordenadas polares

$$\begin{aligned} p(r, \theta) dr d\theta &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r dr d\theta \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \times \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

Se obtienen los generadores

$$r = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - z)}$$

$\theta = 2\pi z$, de ambos se obtiene

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



Esquema de la integración

$$\frac{I}{A} \approx \frac{\#\{\text{puntos que caen en } I\}}{\#\{\text{puntos en total generados}\}}$$
$$I \approx \frac{\#\{\text{puntos que caen en } I\}}{\#\{\text{puntos en total generados}\}} \times A$$



El programa

```
import numpy as np
from random import random

#Definimos la funcion
def f(x):
    return np.sin(1/(x*(2-x)))**2

#Definimos las inicializaciones
N= 1000
count = 0

#ciclo principal
for i in range(N):
    x=2*random()
    y= random()
    if y<f(x):
        count+=1

#Evaluamos la integral
I=2*count/N
print(I)
```

Paso de partículas a través de la materia

- Los valores calculados por pedazos
- Propagación de la partícula por diversos procesos
- Comparación con el experimento